Joaquim J. Júdice

Pedro C. Martins

Marta M. B. Pascoal

Jorge P. Santos

PROGRAMAÇÃO LINEAR

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

2009

Conteúdo

1 Introdução

O conceito de Optimização está normalmente associado à decisão estratégica de quantidades limitadas de recursos entre actividades competitivas, de forma a que a solução produzida seja a melhor possível. Notar que este processo surge com frequência em estruturas organizacionais que envolvam alguma complexidade de gestão. São exemplos de algumas aplicações práticas da Optimização, a distribuição de matérias primas na produção de bens de consumo, a selecção de carteiras de investimento, a selecção de formas e trajectos de transporte, o planeamento agrícola e a idealização de terapias baseadas em radiações.

A *Programação Linear* (PL) está relacionada com a optimização (minimização ou maximização) de uma função linear, satisfazendo um conjunto de equações e/ou inequações (restrições) igualmente lineares. Este problema foi inicialmente concebido por George B. Dantzig em 1947 quando trabalhava como consultor matemático da Unidade de Controlo da Força Aérea Norte Americana. Apesar de actualmente se saber que o matemático e economista soviético L. V. Kantorovich formulou e resolveu previamente o mesmo tipo de problema em 1939, o seu trabalho permaneceu ignorado até 1959. Por esse facto, é atribuída a Dantzig a concepção de problemas de PL, sendo a denominação Programação Linear usada pela primeira vez pelo economista e matemático T. C. Koopmans em 1948.

Em 1949 George B. Dantzig desenvolveu o chamado Método Simplex para resolver programas lineares. Desde então tem havido um grande progresso dessa disciplina tanto em desenvolvimentos teóricos e computacionais como na exploração de novas aplicações da PL. O método simplex recolhe grande aceitação para a resolução desses programas, devido não só à sua simplicidade mas principalmente à sua capacidade em produzir soluções em tempo aceitável. É no entanto importante referir que se trata de um algoritmo não-polinomial, pois é possível encontrar uma classe de problemas lineares para os quais o método simplex exibe um esforço de crescimento exponencial, com a dimensão do problema. No entanto, o seu comportamento tem sido, em termos práticos, análogo ao de um algoritmo polinomial.

Actualmente existem outros algoritmos teoricamente mais eficientes para problemas de PL, exibindo um comportamento polinomial em relação ao esforço de determinação da solução óptima. São exemplos disso, o método do elipsóide e os já muito famosos algoritmos de pontos interiores. No entanto o método simplex continua a ser o processo mais usado na prática para a resolução de programas lineares. Além disso esse algoritmo ou a sua variante dual-simplex pode ser usado eficientemente na resolução de programas lineares com estruturas especiais (redes e transportes) e com variáveis inteiras e na análise de sensibilidade, tarefas para as quais os algoritmos de pontos interiores ainda não se mostraram suficientemente competitivos. Por isso limitar-nos-emos neste texto a estudar os métodos simplex e dual simplex.

A modelação e análise de um problema de Programação Linear desenvolve-se através de vários passos. A fase *de formulação do problema* envolve um estudo detalhado do sistema e consequente recolha de dados, de modo a identificar as suas restrições ou limitações e a sua função objectivo. O problema em análise pode, frequentemente, ser apenas uma parcela de um sistema mais global. O passo seguinte envolve a identificação do problema através de um *modelo matemático*. É necessário algum cuidado para assegurar que o modelo seja matematicamente tratável e represente satisfatoriamente o sistema em análise. Este compromisso deverá ser estabelecido de forma equilibrada e as hipóteses subjacentes ao modelo deverão ser consideradas de forma adequada. Assim sendo, deve-se ter em mente que as soluções que se obtiverem correspondem ao modelo e não necessariamente ao sistema, a não ser que o modelo represente fielmente a situação real.

O terceiro passo envolve a *obtenção de uma solução* para a qual, deve ser escolhido o método simplex ou uma sua variante ou uma técnica de pontos interiores. A quarta fase envolve *teste*, *análise* e (possivelmente) *restruturação do modelo*. A solução do modelo pode ser examinada, tal como a sua sensibilidade a vários parâmetros do sistema, estudando o seu comportamento em vários cenários de hipóteses diferentes. Esta análise de sensibilidade permite um melhor conhecimento do sistema e servirá para averiguar a fiabilidade do modelo, através da comparação dos resultados calculados com os resultados esperados, utilizando experiência recolhida no passado ou através de um teste de regressão usando dados históricos. Nesta etapa, pode pretender-se enriquecer o modelo através da incorporação de outros aspectos importantes do sistema, que tenham sido anteriormente ignorados, ou mesmo optar-se por simplificar o modelo. O último passo envolve a *implementação* de todo o processo de modo a poder ser usado interactivamente pelo agente de decisão.

Neste trabalho procura-se apresentar os assuntos mais interessantes da chamada Programação Linear, nomeadamente o problema de existência e unicidade de solução óptima de um programa linear, o tratamento computacional e as suas aplicações. Na estruturação deste trabalho são apresentados na primeira secção vários modelos de programação linear que servirão ao leitor de motivação para o estudo destes problemas. Nas secções seguintes são discutidos alguns conceitos e resultados matemáticos importantes que sustentam teoricamente os métodos da Programação Linear. A dualidade linear é abordada a seguir. Posteriormente, são estudados os métodos simplex e dual-simplex, suas convergências e implementações. Por fim, são apresentadas as extensões dos métodos simplex e dual-simplex para variáveis com limites superiores e são estudadas várias situações de pós-optimização e análise de sensibilidade.

Na feitura deste trabalho procurou-se a simplicidade e o rigor na exposição dos vários assuntos de modo a que ele possa ser usado como manual didáctico em qualquer curso de programação linear. O trabalho contém ainda uma enorme variedade de exercícios sobre todos os assuntos e uma bibliografia cuidadosamente escolhida que se poderá tornar um bom auxílio para leituras posteriores sobre a programação linear.

2 Formulação de Problemas em Programa Linear

I. PLANEAMENTO DA PRODUÇÃO

Uma empresa especializada no fabrico de portas em madeira estuda o lançamento de quatro novos modelos cujos preços de venda são 12, 14, 14 e 10 euros, respectivamente. A linha de fabrico da empresa é constituída pelas secções de Corte, Polimento, Montagem e Acabamento. A duração (em minutos) que cada modelo requer em cada secção, assim como as capacidades produtivas mensais (em horas) de cada secção, são dadas pela tabela seguinte:

Modelo\Secção	Corte	Polimento	Montagem	Acabamento
1	14	24	18	14
2	10	18	16	10
3	11	16	15	10
4	8	18	14	11
Capacidade	400	800	600	400

Além disso estes modelos requerem dois tipos de madeira diferentes, podendo a empresa adquirir por mês no máximo 18 toneladas de madeira do primeiro tipo e 12 do segundo tipo. A quantidade em quilogramas que cada modelo necessita é dada pela tabela seguinte:

Tipo de Madeira\Modelo	1	2	3	4
1	10	12	12	8
2	6	4	4	6

Considera-se não existir qualquer dificuldade na absorção do mercado dos três primeiros modelos de portas, enquanto para o último não é possível vender mais de 50 unidades por mês. Pretende-se determinar um modelo de planeamento da produção das portas que satisfaça os requerimentos apresentados e que conduza a um lucro máximo.

Formulação. *Na formulação deste problema, vamos considerar as variáveis de decisão* x_1, x_2, x_3 *e* x_4 *que correspondem, respectivamente, ao número de portas do modelo 1, 2, 3 e 4 a produzir.*

Depois de definidas as variáveis, podemos estabelecer matematicamente as restrições do problema. As capacidades de cada uma das secções são as restrições que aparecem em primeiro lugar neste problema. Comecemos então por analisar a restrição imposta pela secção de corte. Assim tem-se:

- *cada porta dos modelos 1, 2, 3 e 4 necessita de 14, 10, 11 e 8 minutos-máquina, pelo que o total de minutos-máquina necessário à produção de* x_1, x_2, x_3 *e* x_4 *portas dos modelos 1, 2, 3 e 4 é de* $14x_1$, $10x_2$, $11x_3$ *e* $8x_4$*, respectivamente;*
- *a disponibilidade mensal é de 400 horas-máquina, ou seja, de 24000 minutos-máquina.*

Portanto a restrição associada a esta secção pode ser escrita na forma

$$14x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 8x_4 \leq 24000$$

Do mesmo modo, para as outras secções, obtemos

$$24x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 18x_4 \leq 48000$$

$$18x_1 + 16x_2 + 15x_3 + 14x_4 \leq 36000$$

$$14x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 11x_4 \leq 24000$$

Além disso existem as restrições relativas às quantidades de madeira que a empresa tem ao seu dispor. Em relação à madeira do primeiro tipo tem-se

- *cada porta dos modelos 1, 2, 3 e 4 necessita de 10, 12, 12 e 8 quilogramas, pelo que o total em quilogramas necessário à produção de* x_1, x_2, x_3 *e* x_4 *portas dos modelos 1, 2, 3 e 4 é de* $10x_1$, $12x_2$, $12x_3$ *e* $8x_4$*, respectivamente;*
- *a disponibilidade mensal é de 18 toneladas, ou seja, de 18000 quilogramas.*

Portanto a restrição associada a esta situação pode ser escrita na forma

$$10x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 8x_4 \leq 18000$$

Do mesmo modo, para a madeira do segundo tipo, obtemos

$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 12000$$

Existe ainda uma outra restrição imposta pelo mercado, que limita a produção do número de portas do último modelo em 50 unidades, e que é por isso traduzida por

$$x_4 \leq 50$$

Além disso, só têm sentido produções inteiras não negativas, isto é

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Para terminarmos a formulação do problema é necessário construir a função objectivo. Os preços unitários de venda das portas dos modelos 1, 2, 3 e 4 são de 12, 14, 14 e 10 unidades monetárias, pelo que os preços de venda de x_1*,* x_2*,* x_3 *e* x_4 *portas dos modelos 1, 2, 3 e 4 são de* $12x_1$*,* $14x_2$*,* $14x_3$ *e* $10x_4$*, respectivamente. Se* z *é o montante total proveniente da venda das portas, então há que determinar o valor das variáveis* x_1*,* x_2*,* x_3 *e* x_4 *que maximizam a função linear definida por*

$$z = 12x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 10x_4$$

Em síntese, obtivemos o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\textit{Maximize } z = & 12x_1 & + & 14x_2 & + & 14x_3 & + & 10x_4 & & \\
\textit{Sujeito a} & 14x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & + & 8x_4 & \leq & 24000 \\
 & 24x_1 & + & 18x_2 & + & 16x_3 & + & 18x_4 & \leq & 48000 \\
 & 18x_1 & + & 16x_2 & + & 15x_3 & + & 14x_4 & \leq & 36000 \\
 & 14x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & + & 11x_4 & \leq & 24000 \\
 & 10x_1 & + & 12x_2 & + & 12x_3 & + & 8x_4 & \leq & 18000 \\
 & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & \leq & 12000 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 50 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

É de notar que o número de portas deve ser um valor inteiro. Como o problema é constituído apenas por restrições de "$\leq$" e os coeficientes das variáveis são não negativos, o simples arredondamento de cada variável da solução óptima do programa linear para o inteiro imediatamente anterior fornece uma solução que satisfaz as restrições do problema e que será certamente bastante interessante para o problema em causa.

II. SELECÇÃO DE INVESTIMENTOS

Um empresa pretende aplicar os rendimentos das suas fábricas em fundos de investimento durante um período de cinco anos. Dos fundos existentes actualmente no mercado seleccionou um conjunto de quatro, por lhe oferecerem taxas de juro mais elevadas em períodos de tempo iguais. Os dados relativos às taxas e periodicidade dos juros são dados pela tabela seguinte:

fundo de investimento	1	2	3	4
periodicidade do juro (em meses)	6	12	24	36
taxa de juro (por período)	2,2%	4,6%	9,6%	15%

Sabe-se que a empresa tem neste momento um resultado líquido de 0.5 milhões de euros, sendo os rendimentos esperados da actividade das fábricas ao fim de cada seis meses dados pela seguinte tabela:

período de tempo	6	12	18	24	30	36	42	48	54
rendimento esperado (em milhões de euros)	0.3	0.6	0.3	0.4	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

A empresa pretende elaborar um plano de investimentos que lhe permita maximizar o lucro líquido obtido no final dos cinco anos.

Formulação. *Na formulação deste problema consideramos* x_{ij} *(*$i = 1, 2, 3, 4$*;* $j = 1, 2, \ldots, 10$*) como variáveis de decisão que correspondem ao montante em milhões de euros que deve ser aplicado no fundo de investimento* i *no início de cada período* j *de seis meses. Se* z *é o lucro líquido total proveniente do investimento nos fundos, então a função objectivo é definida por:*

$$
\begin{aligned}
z \;=\;& 0.022x_{11} + 0.022x_{12} + 0.022x_{13} + 0.022x_{14} + 0.022x_{15} + \\
& 0.022x_{16} + 0.022x_{17} + 0.022x_{18} + 0.022x_{19} + 0.022x_{1,10} + \\
& 0.046x_{21} + 0.046x_{22} + 0.046x_{23} + 0.046x_{24} + 0.046x_{25} + 0.046x_{26} + 0.046x_{27} + 0.046x_{28} + 0.046x_{29} + \\
& 0.096x_{31} + 0.096x_{32} + 0.096x_{33} + 0.096x_{34} + 0.096x_{35} + 0.096x_{36} + 0.096x_{37} + \\
& 0.150x_{41} + 0.150x_{42} + 0.150x_{43} + 0.150x_{44} + 0.150x_{45}
\end{aligned}
$$

ou seja

$$z = 0.022\sum_{j=1}^{10} x_{1j} + 0.046\sum_{j=1}^{9} x_{2j} + 0.096\sum_{j=1}^{7} x_{3j} + 0.150\sum_{j=1}^{5} x_{4j}$$

É de notar que a partir do início do segundo semestre dos terceiro, quarto e quinto anos não se fazem aplicações em fundos com periodicidades de 3, 2 e 1 anos, respectivamente. Isto deve-se ao facto dos vencimentos destas aplicações serem posteriores ao final do quinto ano, não sendo por isso consideradas.

Na formulação do problema há ainda a considerar uma restrição para o início de cada período de seis meses, que indica que a soma dos montantes a investir nos fundos é igual à soma do dinheiro proveniente dos rendimentos das fábricas com o dinheiro proveniente do capital e juros de investimentos vencidos no mesmo período. Assim tem-se

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 0.5 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 0.3 + 1.022x_{11} \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 0.6 + 1.022x_{12} + 1.046x_{21} \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 0.3 + 1.022x_{13} + 1.046x_{22} \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 0.4 + 1.022x_{14} + 1.046x_{23} + 1.096x_{31} \\
x_{16} + x_{26} + x_{36} &= 0.2 + 1.022x_{15} + 1.046x_{24} + 1.096x_{32} \\
x_{17} + x_{27} + x_{37} &= 0.3 + 1.022x_{16} + 1.046x_{25} + 1.096x_{33} + 1.150x_{41} \\
x_{18} + x_{28} &= 0.1 + 1.022x_{17} + 1.046x_{26} + 1.096x_{34} + 1.150x_{42} \\
x_{19} + x_{29} &= 0.1 + 1.022x_{18} + 1.046x_{27} + 1.096x_{35} + 1.150x_{43} \\
x_{1,10} &= 0.2 + 1.022x_{19} + 1.046x_{28} + 1.096x_{36} + 1.150x_{44}
\end{aligned}
$$

Além destas restrições tem-se ainda

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \; j = 1, 2, \ldots, 10$$

Tendo em conta as expressões apresentadas, obtém-se o seguinte programa linear

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Maximize } z = & 0.022 \sum_{j=1}^{10} x_{1j} + 0.046 \sum_{j=1}^{9} x_{2j} + 0.096 \sum_{j=1}^{7} x_{3j} + 0.150 \sum_{j=1}^{5} x_{4j} & \\
\textit{Sujeito a} & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} & = 0.5 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} - 1.022x_{11} & = 0.3 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} - 1.022x_{12} - 1.046x_{21} & = 0.6 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} - 1.022x_{13} - 1.046x_{22} & = 0.3 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} - 1.022x_{14} - 1.046x_{23} - 1.096x_{31} & = 0.4 \\
& x_{16} + x_{26} + x_{36} \quad - 1.022x_{15} - 1.046x_{24} - 1.096x_{32} & = 0.2 \\
& x_{17} + x_{27} + x_{37} \quad - 1.022x_{16} - 1.046x_{25} - 1.096x_{33} - 1.150x_{41} & = 0.3 \\
& x_{18} + x_{28} \quad - 1.022x_{17} - 1.046x_{26} - 1.096x_{34} - 1.150x_{42} & = 0.1 \\
& x_{19} + x_{29} \quad - 1.022x_{18} - 1.046x_{27} - 1.096x_{35} - 1.150x_{43} & = 0.1 \\
& x_{1,10} \quad - 1.022x_{19} - 1.046x_{28} - 1.096x_{36} - 1.150x_{44} & = 0.2 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, \ldots, 10 &
\end{array}
$$

III. PROBLEMA DE STOCKS

Uma empresa do ramo alimentar produz quatro tipos de óleo, alimentar, soja, milho e amendoim, e planeia a sua produção para os próximos seis meses. Com base em anos anteriores chegou-se à conclusão que as previsões de vendas (em milhares de caixas) são as que constam da seguinte tabela:

Meses\Óleos	Alimentar	Soja	Milho	Amendoim
Janeiro	9	18	2	2
Fevereiro	8	16	1	1
Março	10	20	6	4
Abril	12	22	6	6
Maio	10	20	3	4
Junho	12	22	6	5

A capacidade normal de produção é de 40 milhares de caixas por mês, sendo os custos unitários de produção (em u.m. por caixa) dados pela seguinte tabela:

Meses\Óleos	Alimentar	Soja	Milho	Amendoim
Janeiro	1500	800	2000	2100
Fevereiro	1400	800	1900	2000
Março	1500	850	2200	2200
Abril	1600	900	2150	2300
Maio	1550	850	2250	2200
Junho	1600	800	2300	2350

A empresa consegue produzir até 5 mil caixas de óleo por mês, com custo unitário adicional de 5%, em horário extraordinário. A capacidade de armazenagem é de 50 mil caixas, sendo o custo unitário de armazenagem de apenas 1 u. m. para uma caixa de qualquer tipo de óleo. A empresa deseja planear a sua produção, tendo em conta que existe em stock no início do mês de Janeiro três mil caixas de óleo alimentar, seis mil de soja, mil de amendoim e mil de milho e que no final do mês de Junho os stocks terão de ser repostos.

Formulação. *Considere-se o seguinte conjunto de variáveis principais, onde o índice i está associado aos tipos de óleo (1 ≡ óleo alimentar, 2 ≡ óleo de soja, 3 ≡ óleo de milho, 4 ≡ óleo de amendoim) e o índice j está associado aos meses (1 ≡ Janeiro, 2 ≡ Fevereiro, 3 ≡ Março, 4 ≡ Abril, 5 ≡ Maio e 6 ≡ Junho)*

x_{ij} $(i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 6)$ ≡ *número de caixas de óleo do tipo i a produzir em horário normal no mês j,*

y_{ij} $(i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 6)$ $\equiv$ número de caixas de óleo do tipo i a produzir em horário extraordinário no mês j,

s_{ij} $(i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 5)$ $\equiv$ número de caixas de óleo do tipo i em stock no final do mês j.

Em relação às restrições, em cada mês, o número de caixas de óleo produzido em horário normal e extraordinário terá de ser maior ou igual que a quantidade previsível de venda. A diferença irá para armazém e será quantificada pelas variáveis s_{ij} para cada um dos meses, respectivamente. Essas restrições terão então a forma

$$
\begin{array}{rcrrcr}
x_{11} + y_{11} + 3 & = & 9 + s_{11}, & x_{21} + y_{21} + 6 & = & 18 + s_{21}, \\
x_{12} + y_{12} + s_{11} & = & 8 + s_{12}, & x_{22} + y_{22} + s_{21} & = & 16 + s_{22}, \\
x_{13} + y_{13} + s_{12} & = & 10 + s_{13}, & x_{23} + y_{23} + s_{22} & = & 20 + s_{23}, \\
x_{14} + y_{14} + s_{13} & = & 12 + s_{14}, & x_{24} + y_{24} + s_{23} & = & 22 + s_{24}, \\
x_{15} + y_{15} + s_{14} & = & 10 + s_{15}, & x_{25} + y_{25} + s_{24} & = & 20 + s_{25}, \\
x_{16} + y_{16} + s_{15} & = & 12 + 3, & x_{26} + y_{26} + s_{25} & = & 22 + 6, \\
 & & & & & \\
x_{31} + y_{31} + 1 & = & 2 + s_{31}, & x_{41} + y_{41} + 1 & = & 2 + s_{41}, \\
x_{32} + y_{32} + s_{31} & = & 1 + s_{32}, & x_{42} + y_{42} + s_{41} & = & 1 + s_{42}, \\
x_{33} + y_{33} + s_{32} & = & 6 + s_{33}, & x_{43} + y_{43} + s_{42} & = & 4 + s_{43}, \\
x_{34} + y_{34} + s_{33} & = & 6 + s_{34}, & x_{44} + y_{44} + s_{43} & = & 6 + s_{44}, \\
x_{35} + y_{35} + s_{34} & = & 3 + s_{35}, & x_{45} + y_{45} + s_{44} & = & 4 + s_{45}, \\
x_{36} + y_{36} + s_{35} & = & 6 + 1, & x_{46} + y_{46} + s_{45} & = & 5 + 1.
\end{array}
$$

Seja $s_{10} = s_{16} = 3$, $s_{20} = s_{26} = 6$, $s_{30} = s_{36} = 1$, $s_{40} = s_{46} = 1$ e representemos por p_{ij} as previsões de venda do óleo do tipo i no mês j. Então as restrições anteriores podem ser escritas da seguinte forma

$$x_{ij} + y_{ij} + s_{i,j-1} = p_{ij} + s_{ij} \quad (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 6)$$

Além destas condições, existem ainda limitações no total de caixas de óleo a produzir pela empresa, tanto em horário normal como em horário extraordinário, que são expressas através das seguintes restrições

$$
\begin{array}{ll}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 40, & y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} \leq 5, \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 40, & y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} \leq 5, \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 40, & y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} \leq 5, \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \leq 40, & y_{14} + y_{24} + y_{34} + y_{44} \leq 5, \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \leq 40, & y_{15} + y_{25} + y_{35} + y_{45} \leq 5, \\
x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} \leq 40, & y_{16} + y_{26} + y_{36} + y_{46} \leq 5.
\end{array}
$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq 40, \quad (j = 1, \ldots, 6)$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_{ij} \leq 5, \quad (j = 1, \ldots, 6)$$

Por fim existem limitações no número de caixas a armazenar, que são descritas pelo seguinte conjunto de restrições:

$$
\begin{array}{rcl}
9 + 18 + 2 + 2 + s_{11} + s_{21} + s_{31} + s_{41} \leq 50 & \Leftrightarrow & s_{11} + s_{21} + s_{31} + s_{41} \leq 13 \\
8 + 16 + 1 + 1 + s_{12} + s_{22} + s_{32} + s_{42} \leq 50 & \Leftrightarrow & s_{12} + s_{22} + s_{32} + s_{42} \leq 28 \\
10 + 20 + 6 + 4 + s_{13} + s_{23} + s_{33} + s_{43} \leq 50 & \Leftrightarrow & s_{13} + s_{23} + s_{33} + s_{43} \leq 14 \\
12 + 22 + 6 + 6 + s_{14} + s_{24} + s_{34} + s_{44} \leq 50 & \Leftrightarrow & s_{14} + s_{24} + s_{34} + s_{44} \leq 10 \\
10 + 20 + 3 + 4 + s_{15} + s_{25} + s_{35} + s_{45} \leq 50 & \Leftrightarrow & s_{15} + s_{25} + s_{35} + s_{45} \leq 7
\end{array}
$$

Estas restrições são equivalentes a

$$\sum_{i=1}^{4} s_{ij} \leq 50 - \sum_{i=1}^{4} p_{ij}, \quad (j = 1, \ldots, 5)$$

Além disso, tem-se

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 6)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 6)$$

$$s_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 5)$$

Representemos por c_{ij} $(i = 1, \ldots, 4;$ $j = 1, \ldots, 6)$ o custo unitário de produção de uma caixa de óleo do tipo i no mês j em horário normal. O objectivo do nosso problema é minimizar o custo total de produção e armazenagem, ou seja, a quantidade

$$z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} 1.05c_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} s_{ij} \quad (\times 10^3)$$

Estas expressões conduzem ao seguinte programa linear

$$\begin{array}{lll}
\textit{Minimize } z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} 1.05c_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} s_{ij} & \\
\textit{Sujeito a} & x_{ij} + y_{ij} + s_{i,j-1} = p_{ij} + s_{ij} & (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 6) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq 40 & (j = 1, \ldots, 6) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{4} y_{ij} \leq 5 & (j = 1, \ldots, 6) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{4} s_{ij} \leq 50 - \sum_{i=1}^{4} p_{ij} & (j = 1, \ldots, 5) \\
& x_{ij} \geq 0 & (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 6) \\
& y_{ij} \geq 0 & (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 6) \\
& s_{ij} \geq 0 & (i = 1, \ldots, 4; \quad j = 1, \ldots, 5)
\end{array}$$

3 Forma Normal de um Programa Linear

O *Problema de Optimização ou de Programação Matemática* consiste na determinação do valor de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que tornam mínimo ou máximo o valor de uma função

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

num conjunto definido por m restrições

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Cada variável x_j varia num determinada intervalo

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

onde $-\infty \leq l_j < u_j \leq +\infty$.

O *Problema de Programação Linear* é caracterizado pelo facto de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ serem funções lineares. A *Forma Normal* de um programa linear é a seguinte

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{Minimize } z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & & \\
\text{Sujeito a} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \ldots & & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & = & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \tag{1}$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

onde a_{ij}, b_i, c_j, l_j e u_j $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ são parâmetros do problema.

A função a minimizar ou a maximizar, $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, designa-se por *Função Objectivo*. As igualdades $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ constituem as *Restrições* e as desigualdades $l_j \leq x_j \leq u_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ as *Condições de Limites*. Se $u_j = +\infty$ e $l_j = 0$, então a restrição de limite em x_j tem a forma $x_j \geq 0$ e diz-se *Condição de Não Negatividade*. Nesse caso a forma normal diz-se *Simples*. A forma normal contém ainda as j *Variáveis Principais* ou de *Decisão* x_j. O conjunto de soluções que satisfazem as restrições designa-se por *Conjunto Admissível* e cada solução desse conjunto diz-se *Admissível*. A *Solução Óptima* de um programa é a solução admissível de menor (maior) valor z, no caso de se tratar de um problema de minimização (maximização).

Os números reais c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ designam-se por *Coeficientes de Custo* e representam o prejuízo (lucro) unitário associado à variável de decisão x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, no caso do problema ser de minimização (maximização). Além disso, os chamados *Coeficientes Tecnológicos* a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ representam a medida unitária exigida pela variável de decisão x_j em relação ao recurso associado à restrição de ordem i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Finalmente os coeficientes b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ são designados por *Termos Independentes* das restrições e representam as limitações dos recursos associados às restrições.

Na prática, os programas lineares aparecem geralmente em outras formas que se podem transformar na forma normal, por modificações relativamente simples. Assim um problema de minimização pode converter-se num problema de maximização, pois

$$\text{Máximo } \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = -\text{Mínimo } \sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j$$

ou seja,

$$\text{Máximo } z = -\text{Mínimo } (-z)$$

Assim, após a resolução do novo problema de minimização, o valor da função objectivo do problema inicial é igual ao valor da função objectivo do novo problema multiplicado por (-1). Além disso, toda a desigualdade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ pode ser transformada numa igualdade, por introdução de uma variável adicional com condição de não negatividade. Com efeito a desigualdade anterior é equivalente a

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

com

$$x_{n+i} \geq 0$$

Do mesmo modo, a desigualdade $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$ pode ser escrita na forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$

em que

$$x_{n+i} \geq 0$$

As novas variáveis x_{n+i} designam-se por *Variáveis de Desvio* ou *Variáveis de Folga*.

Tendo em conta essas considerações, todo o programa linear pode ser escrito na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{2}$$

Este problema pode ainda ser escrito numa notação matricial. Com efeito, considerando os vectores c, l, u e x de $\mathbb{R}^n$ e b de $\mathbb{R}^m$ e a matriz A de $\mathbb{R}^{m\times n}$ definidos a seguir

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

então o programa linear consiste na determinação do vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array} \tag{3}$$

Como veremos nas próximas secções, será particularmente usada durante este curso uma forma, em que $l_j = 0$ e $u_j = +\infty$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso as condições de limite são substituídas pelas de não negatividade, obtendo-se a forma normal simples

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

4 Solução Básica de um Sistema de Equações Lineares

Considere-se o sistema $Ax = b$ com A uma matriz de ordem $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Iremos assumir que a característica de A é igual a m, pelo que o sistema é possível e indeterminado. Uma solução $\overline{x}$ desse sistema diz-se *Básica* se existir um subconjunto $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(n - m)$ valores reais v_j tais que

1. $\overline{x}_j = v_j$ para $j \notin J$
2. As colunas $A_{.j}$ de A para $j \in J$ são linearmente independentes.

Se se considerar a matriz quadrada

$$B = [A_{.j_1}, A_{.j_2}, \ldots, A_{.j_m}] = [A_{.j}]_{j \in J} \tag{5}$$

constituída pelas colunas de A associadas aos índices de J, então B é não singular. Com efeito, como $A_{\cdot j_1}, A_{\cdot j_2}, \ldots, A_{\cdot j_m}$ são linearmente independentes, então a característica de B é igual a m e B é de ordem $m \times m$. Essa matriz B diz-se a *Base* associada à solução básica. Além disso, como $\overline{x}_j = v_j$ para $j \notin J$ então os valores das restantes variáveis podem ser obtidos a partir de

$$B\overline{x}_J = b - \sum_{j \notin J} v_j A_{\cdot j} \tag{6}$$

Assim, uma solução básica tem sempre associados um conjunto de índices J e dois tipos de variáveis. As correspondentes a esse conjunto dizem-se *Básicas* e satisfazem a igualdade (6). As restantes são denominadas *Não Básicas* e têm valores fixos.

Consideremos as restrições de um programa linear na forma normal

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Para obter uma solução básica admissível do programa linear, cada um dos valores v_j das variáveis não básicas x_j deve ser um dos limites l_j ou u_j. Além disso, os valores das variáveis básicas obtêm-se resolvendo o sistema (6). Se $l_j \leq x_j \leq u_j$ para todo $j \in J$, então a solução básica é admissível. De outro modo, é uma solução básica de $Ax = b$ não admissível. Uma solução básica diz-se *Não Degenerada* se $\overline{x}_j \notin \{l_j, u_j\}$ para todo $j \in J$. De outro modo é *Degenerada* e neste caso há pelo menos um índice $j \in J$ tal que $\overline{x}_j = l_j$ ou $\overline{x}_j = u_j$. A título de exemplo, consideremos o sistema linear

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Seja $J = \{1, 2\}$ e fixemos $x_3 = x_4 = 0$. Então

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e $b - \sum_{j \notin J} v_j A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Portanto as variáveis básicas x_1 e x_2 são dadas univocamente por

$$Bx_J = b$$

ou seja, satisfazem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde $x_1 = \dfrac{3}{2}$ e $x_2 = -\dfrac{1}{2}$. Assim obtém-se a solução básica

$$x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \right)$$

que não é admissível, pois x_i, $i = 1, 2$, não satisfazem $0 \leq x_i \leq 1$. Por outro lado, para $J = \{1, 3\}$ a matriz base é

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que as variáveis não básicas x_2 e x_4 tomam valores iguais aos limites superiores, ou seja,

$$x_2 = x_4 = 1.$$

Então

$$b - \sum_{j \notin J} v_j A_{.j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto as variáveis básicas são soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde $x_1 = 0$, $x_3 = 1$ e a solução básica é

$$x = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

Como $0 \le x_1 \le 1$ e $0 \le x_3 \le 1$, então a solução básica é admissível.

Consideremos finalmente o caso de $J = \{2, 3\}$. Então

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é singular e portanto não há uma solução básica associada a esse conjunto J.

Notar finalmente que o processo de construção de uma solução básica para condições de não negatividade é ainda mais simples que no caso geral. Com efeito as variáveis não básicas são nulas e portanto as variáveis básicas constituem a solução única do sistema

$$Bx_J = b$$

A solução básica é admissível se os valores das variáveis básicas são não negativos. Além disso, não existe solução básica associada a J se B é singular. A título de exemplo, consideremos as restrições de um programa linear na forma normal simples

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

A solução básica associada a $J = \{1, 2\}$ é dada por

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$x = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$$

Essa solução básica é admissível, pois as variáveis básicas são não negativas. Por outro lado, não há solução básica associada a $J = \{2, 4\}$, pois a correspondente matriz B é singular.

5 Sistema de Desigualdades Lineares

Como referimos anteriormente, é frequente em Programação Linear aparecerem restrições na forma de desigualdades em vez de igualdades. Assim por exemplo, o número de veículos utilizados por uma empresa tem de ser menor ou igual do que o número total de veículos que essa empresa possui.

Uma desigualdade linear tem a forma geral

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \tag{7}$$

ou

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \tag{8}$$

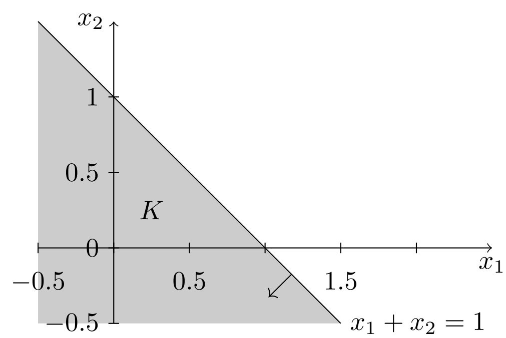
É de notar que uma das formas pode ser reduzida à outra, através da multiplicação de ambos os membros por (-1). Com efeito (7) pode ser escrita na forma

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i$$

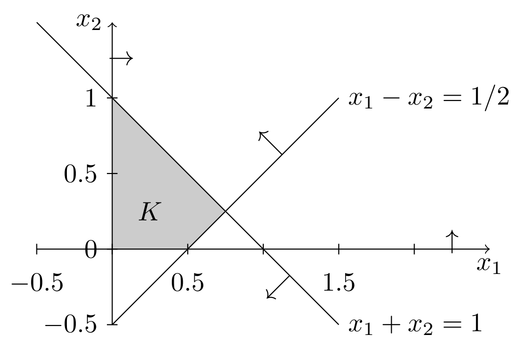
Um sistema de desigualdades lineares é um conjunto de restrições da forma (7) e (8). Tal como no caso das equações lineares, um sistema de desigualdades lineares pode ser impossível, ter uma solução única ou ser indeterminado. Se o número de variáveis é igual a dois, então é fácil determinar graficamente o conjunto de soluções de um sistema de desigualdades. Isso é explicado a seguir com o auxílio do seguinte sistema

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \tag{9}$$

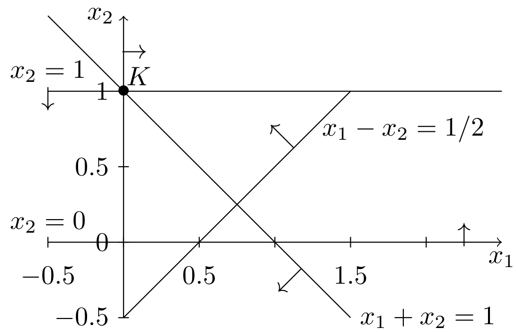
Para representar $x_1 + x_2 \leq 1$ começa-se por traçar a recta da equação $x_1 + x_2 = 1$. Esta recta divide o plano X_1X_2 em dois semi-planos, $x_1 + x_2 \leq 1$ e $x_1 + x_2 \geq 1$. Para determinar aquele que corresponde a $x_1 + x_2 \leq 1$ considera-se um ponto $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ que não pertença à recta $x_1 + x_2 = 1$. Se $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 < 1$ então a desigualdade corresponde ao semi-plano que contém este ponto. De outro modo, a desigualdade é representada pelo outro semi-plano. Assim a desigualdade $x_1 + x_2 \leq 1$ é representada pelo semi-plano a sombreado, na seguinte figura



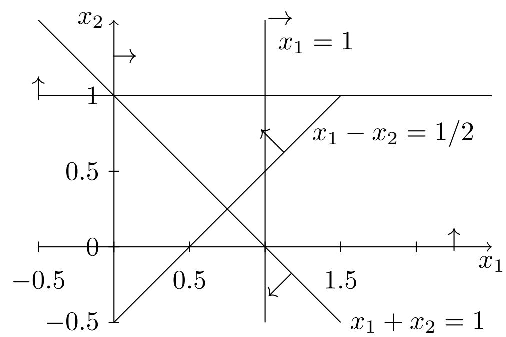
Para isso basta notar que a origem $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ satisfaz a desigualdade. As outras desigualdades são representadas geometricamente de modo semelhante, sendo assim fácil determinar o conjunto que representa as soluções do sistema (9). Esse conjunto está representado pela região que se encontra a sombreado na seguinte figura.



Se agora se juntar a desigualdade $x_2 \geq 1$ a (9), então o sistema resultante tem uma solução única ($x_1 = 0, x_2 = 1$), tal como sugere a seguinte figura



Por outro lado, se se adicionar a desigualdade $x_1 \geq 1$ a (9), então o sistema torna-se impossível, como se pode observar a seguir.

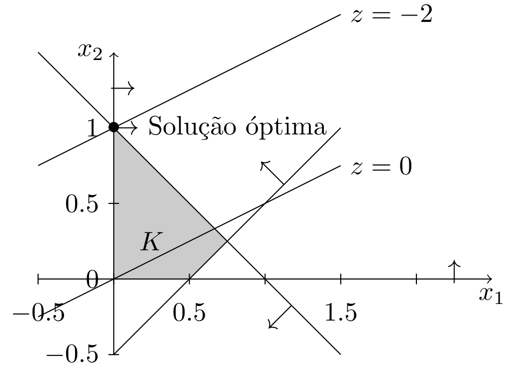


6 Resolução Gráfica de Programas Lineares

No sentido de clarificar o problema de programação linear, iremos nesta secção discutir a resolução gráfica de um programa linear com apenas duas variáveis. Considere-se o seguinte programa linear

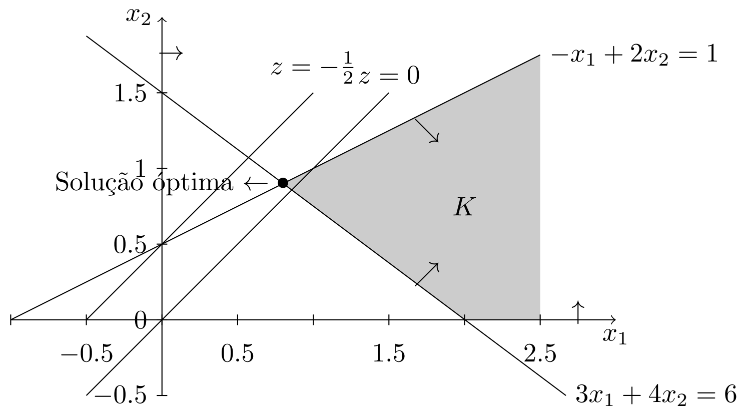
$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1/2 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

onde a região admissível corresponde ao conjunto K representado a sombreado na figura 1 e que foi obtido de acordo com o processo explicado anteriormente. Para cada z a equação que define a função objectivo $x_1 - 2x_2 = z$ é uma recta. A resolução gráfica do programa linear consiste em determinar o menor valor de z para o qual a recta $x_1 - 2x_2 = z$ intersecta a região admissível. Esse processo é muito fácil de efectuar. Para isso consideram-se dois valores z_1 e z_2 de z e traçam-se as rectas respectivas. Desse modo é encontrado um sentido para o decréscimo do valor de z. No nosso caso usando $z_1 = 0$ e $z_2 = -2$ concluímos que esse decréscimo tem o sentido indicado na figura. Então o ponto $x = (0, 1)$ é a solução óptima do programa e o valor óptimo é $z = -2$.



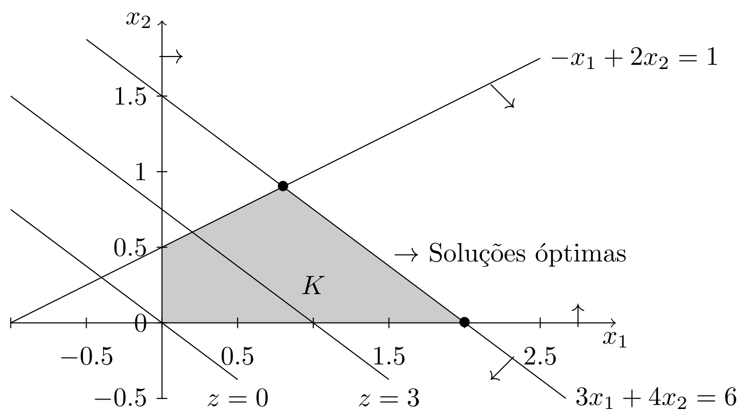
No exemplo apresentado, a solução óptima do programa linear existe e é única e é um vértice da região admissível. Além disso a região admissível é limitada. A solução óptima de um programa linear pode existir e ser única e a região admissível ser ilimitada, conforme mostra o seguinte exemplo

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$



Mais uma vez a solução óptima do programa dado é um vértice do conjunto admissível. O programa e a figura a seguir ilustram um caso em que a solução óptima não é única

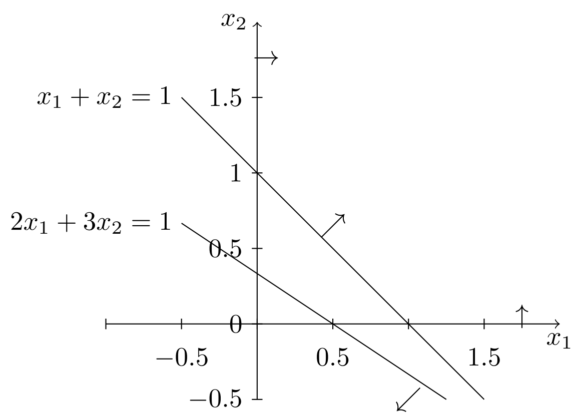
$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{Sujeito a} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$



Apesar de nesse caso haver soluções óptimas que não são vértices do polígono admissível, há pelo menos uma solução óptima nessas condições.

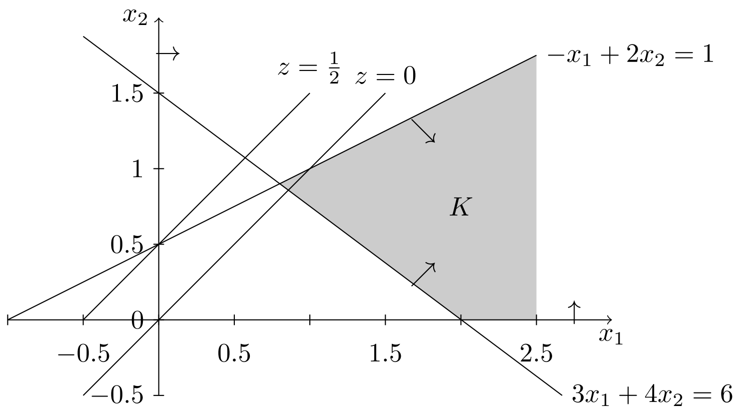
Um programa linear pode ainda ser inadmissível, isto é, o seu conjunto admissível ser vazio. Como exemplo deste caso considere-se o programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$



Finalmente um programa linear pode ser admissível e não ter solução óptima pelo facto da função objectivo ser ilimitada inferiormente no seu conjunto admissível. O próximo programa linear ilustra esse caso

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$



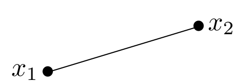
Os exemplos apresentados nesta secção indicam que um programa linear pode ser admissível ou não. Se for admissível e limitado então tem solução óptima, que pode ser única ou não. Além disso, há sempre uma solução óptima num vértice do conjunto admissível. Se o conjunto admissível é ilimitado, então a solução óptima pode existir (e há pelo menos uma solução óptima num vértice) ou a função ser ilimitada inferiormente nesse conjunto. Nesse último caso a função objectivo tende para $(-\infty)$ no conjunto admissível. Nas próximas secções iremos mostrar que realmente estes resultados são verdadeiros para qualquer programa linear.

7 Conjuntos Convexos, Fechados e Limitados

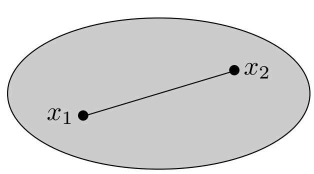
Dado um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x^1 \in K$, $x^2 \in K$ chama-se *Segmento de Recta* (*Intervalo*) de *Extremos* x^1, x^2 ao conjunto

$$[x^1, x^2] = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

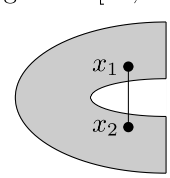
que é ilustrado na seguinte figura



Um conjunto K é *Convexo* se para quaisquer $x^1 \in K$ e $x^2 \in K$ o segmento $[x^1, x^2]$ está contido em K.



K convexo



K não convexo

Da definição de conjunto convexo é fácil concluir que a intersecção de um número finito de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Chama-se *Hiperplano* de $\mathbb{R}^n$ a um conjunto da forma

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\}$$

Tal como em $\mathbb{R}^2$ um hiperplano divide $\mathbb{R}^n$ em dois *Semi-Espaços* definidos por

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i\}$$

e

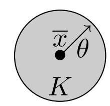
$$\widetilde{S}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i\}$$

Chamamos *Poliedro* à intersecção finita de semi-espaços. É fácil observar que hiperplanos e semi-espaços são conjuntos convexos. Como o conjunto admissível de um programa linear é um poliedro, então verifica-se o seguinte resultado.

Teorema 1 *O conjunto admissível de um programa linear é um poliedro convexo.*

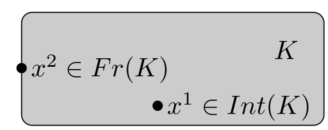
Dado um vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ chama-se *Vizinhança de Centro* $\overline{x}$ *e Raio* $\theta > 0$, ao conjunto

$$V(\overline{x}, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - \overline{x}|| \leq \theta\}$$



com $||.||$ a norma euclideana. Um vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um *Ponto Interior* de um conjunto K se existe $\theta > 0$ tal que $V(\overline{x}, \theta) \subseteq K$. O conjunto dos pontos interiores de K diz-se *Interior* de K e representa-se por $Int(K)$. Um vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um *Ponto Aderente* de K se $V(\overline{x}, \theta) \cap K \neq \emptyset$ para qualquer $\theta > 0$. A *Aderência* de K é o conjunto de pontos aderentes de K e representa-se por $\overline{K}$. Assim tem-se que $Int(K) \subseteq K \subseteq \overline{K}$. Um vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ diz-se um *Ponto Fronteiro* de K se é aderente mas não é interior. A *Fronteira* de K é o conjunto dos pontos fronteiros e representa-se por $Fr(K)$. Em relação à fronteira, estabelecem-se as seguintes relações

$$\overline{K} = Fr(K) \cup Int(K), \quad Fr(K) \cap Int(K) = \emptyset$$



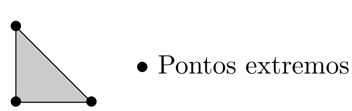
Um conjunto K é *Aberto* se $Int(K) = K$ e é *Fechado* se $K = \overline{K}$. Portanto todo o conjunto fechado contém a sua fronteira. É de notar que todo o hiperplano e os semi-espaços definidos anteriormente são conjuntos fechados. A intersecção de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado e por isso verifica-se o seguinte resultado.

Teorema 2 *O conjunto admissível de um programa linear é um conjunto fechado.*

Um conjunto K diz-se *Limitado* se existe $r > 0$ tal que $||x|| \leq r$ para todo $x \in K$. Portanto K está contido numa vizinhança de centro na origem e raio r. Como vimos anteriormente, o conjunto admissível de um programa linear pode ser limitado ou não.

8 Pontos Extremos de Poliedros Convexos

Um vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ é um *Ponto Extremo* de um conjunto convexo K se $\overline{x} \in K$ e não pertence ao interior de um segmento de recta que une dois vectores de K. Portanto $\overline{x} \in K$ é um ponto extremo de K se não existem x^1 e x^2 tais que $x^i \in K$, $i = 1, 2$ e $\overline{x} = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, com $0 < \lambda < 1$.



Nesta secção iremos caracterizar algebricamente os pontos extremos de poliedros convexos como soluções básicas admissíveis da forma normal. Iremos, por simplicidade, considerar a forma normal simples, pelo que o poliedro K é definido por

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \tag{10}$$

onde $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz de ordem $m \times n$ com característica m. Então é possível demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3 *Seja K o conjunto definido por (10). Então $\overline{x}$ é ponto extremo de K se e só se $\overline{x}$ é solução básica admissível de $Ax = b$, $x \geq 0$.*

Demonstração.

1. Seja $\overline{x}$ um ponto extremo de K. Então $\overline{x}$ é uma solução admissível do sistema que define K. Para provar que $\overline{x}$ é uma solução básica começamos por demonstrar que são linearmente independentes as colunas de A correspondentes às variáveis positivas de $\overline{x}$. Considere-se sem perda de generalidade que $\overline{x}_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$, com $r \leq n$, e provemos que $A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, \ldots, A_{\cdot r}$ são linearmente independentes. Se tal não acontecer, existem r números reais α_i tais que

   $$\alpha_1 A_{\cdot 1} + \alpha_2 A_{\cdot 2} + \ldots + \alpha_r A_{\cdot r} = 0$$

   com pelo menos um $\alpha_j \neq 0$. Mas $Ax = b$ e $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r, 0, 0, \ldots, 0)$ implica que

   $$\overline{x}_1 A_{\cdot 1} + \overline{x}_2 A_{\cdot 2} + \ldots + \overline{x}_r A_{\cdot r} = b$$

   Portanto existe $\theta > 0$ tal que $\overline{x}_i \pm \theta\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ e

   $$(\overline{x}_1 + \theta\alpha_1)A_{\cdot 1} + (\overline{x}_2 + \theta\alpha_2)A_{\cdot 2} + \ldots + (\overline{x}_r + \theta\alpha_r)A_{\cdot r} = b$$

   $$(\overline{x}_1 - \theta\alpha_1)A_{\cdot 1} + (\overline{x}_2 - \theta\alpha_2)A_{\cdot 2} + \ldots + (\overline{x}_r - \theta\alpha_r)A_{\cdot r} = b$$

   Sejam

   $$\widetilde{x} = (\overline{x}_1 + \theta\alpha_1, \overline{x}_2 + \theta\alpha_2, \ldots, \overline{x}_r + \theta\alpha_r, 0, 0, \ldots, 0)$$
   $$\widetilde{\widetilde{x}} = (\overline{x}_1 - \theta\alpha_1, \overline{x}_2 - \theta\alpha_2, \ldots, \overline{x}_r - \theta\alpha_r, 0, 0, \ldots, 0)$$

   Donde

   $$\overline{x} = \frac{1}{2}\widetilde{x} + \frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{x}}, \quad \widetilde{x} \in K \text{ e } \widetilde{\widetilde{x}} \in K$$

   o que é impossível, por $\overline{x}$ ser ponto extremo.

   Como a característica de A é igual a m, então $r \leq m$. Se $r = m$, então $B = [A_{\cdot j}]$ constitui a matriz base associada a $\overline{x}$. Se $r < m$, então existem $(m - r)$ colunas $A_{\cdot i_1}, A_{\cdot i_2}, \ldots, A_{\cdot i_{m-r}}$ tais que $\overline{x}_j = 0$, $j = i_1, i_2, \ldots, i_{m-r}$ e $B = [A_{\cdot 1}\ A_{\cdot 2}\ \ldots\ A_{\cdot r}\ A_{\cdot i_1}\ A_{\cdot i_2}\ \ldots\ A_{\cdot i_{m-r}}]$ é não singular. Então B é a matriz base associada a $\overline{x}$.

2. Se $\overline{x}$ é uma solução básica admissível de $Ax = b$, $x \geq 0$, então, $A = [B\ N]$, com $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ não singular, $N = [A_{\cdot j}]_{j \notin J}$ e $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Além disso

   $$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_J \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $B\overline{x}_J = b$, $\overline{x}_J \geq 0$. Suponhamos que existem $x^1, x^2 \in K$ tais que

$$\overline{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$$

e $0 < \lambda < 1$. Se

$$x^1 = \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

com $u^i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, então a relação anterior pode ser escrita na forma

$$\begin{cases} \overline{x}_J = \lambda u^1 + (1-\lambda)u^2 \\ \quad 0 = \lambda v^1 + (1-\lambda)v^2 \end{cases}$$

Como $0 < \lambda < 1$ e $v^i \geq 0$, $i = 1, 2$, a segunda igualdade implica $v^1 = v^2 = 0$. Mas $A = [B\ N]$ e portanto u^1 e u^2 satisfazem

$$Bu^i = b, \quad i = 1, 2$$

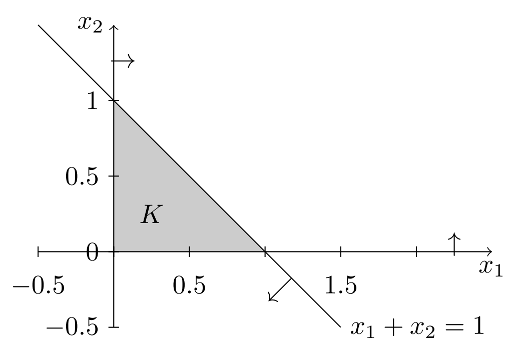
Como B é não singular, então $u^i = \overline{x}_J$, $i = 1, 2$. Donde $\overline{x} = x^1 = x^2$ e isso demonstra a segunda parte do teorema.

□

A título de exemplo, considere-se o conjunto definido pelas seguintes desigualdades

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \tag{11}$$

cuja representação gráfica é apresentada na figura seguinte



Se se introduzir a variável $x_3 \geq 0$, então essas restrições podem ser escritas na forma normal

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \tag{12}$$

Então

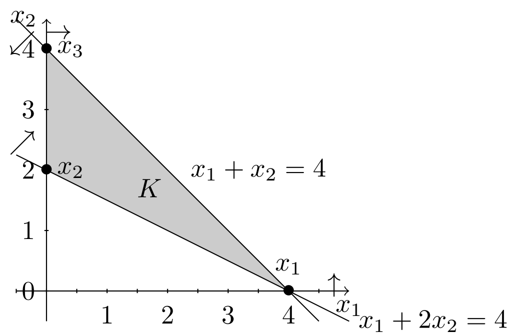
$$x^1 = (1, 0, 0), \quad x^2 = (0, 1, 0), \quad x^3 = (0, 0, 1)$$

são as únicas soluções básicas admissíveis de (12) e x^1, x^2 e x^3 são os pontos extremos do conjunto convexo K definido por essas restrições. Portanto $\widetilde{x}^1 = (1, 0)$, $\widetilde{x}^2 = (0, 1)$, $\widetilde{x}^3 = (0, 0)$ são os pontos extremos do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pelas desigualdades (11).

O teorema anterior mostra que todo o ponto extremo do poliedro convexo K definido pelas restrições da forma normal simples de um programa linear tem uma caracterização algébrica simples, que é exactamente uma solução básica admissível com variáveis não básicas nulas. Se todas as variáveis básicas forem positivas, então há apenas uma solução básica associada ao ponto extremo. Contudo um ponto extremo pode ter associado mais do que uma solução básica admissível quando pelo menos uma das variáveis básicas for nula, isto é, se a solução básica é degenerada. A título de exemplo, consideremos o poliedro definido pelas restrições

$$\begin{array}{l} x_1 + \ \ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{13}$$

cuja representação gráfica é apresentada na figura seguinte



O poliedro convexo possui três pontos extremos x^i, $i = 1, 2, 3$. Se escrevermos as restrições (13) na forma normal

$$\begin{array}{l} x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

então os pontos extremos x^2 e x^3 têm apenas uma solução básica admissível associada, enquanto que há três soluções básicas admissíveis associadas ao ponto extremo x^1. Com efeito

$$x^1 = (4, 0, 0, 0)$$

e há por isso três casos possíveis.

1. x_1 e x_2 são básicas. Como $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é não singular, há uma solução básica admissível $(4,\ 0,\ 0,\ 0)$ associada ao conjunto $J = \{1, 2\}$.

2. x_1 e x_3 básicas. Nesse caso $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é também não singular. Portanto há também uma solução básica admissível $(4,\ 0,\ 0,\ 0)$ associada a $J = \{1, 3\}$.

3. x_1 e x_4 básicas. Como $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é também não singular, então $(4,\ 0,\ 0,\ 0)$ é ainda uma solução básica admissível associada a $J = \{1, 4\}$.

No entanto o ponto extremo

$$x^2 = (0, 2, 2, 0)$$

tem uma e uma só solução básica admissível associada. Com efeito como x_2 e x_3 são não nulas, então têm de ser básicas e portanto

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como essa matriz é não singular então x^2 é uma solução básica admissível.

9 Solução Óptima do Programa Linear

Nesta secção iremos estabelecer um resultado fundamental, segundo o qual toda a função linear definida num poliedro convexo K tem uma solução óptima num ponto extremo ou então é ilimitada inferiormente em K. Para isso necessitamos de algumas definições, que são apresentadas no início desta secção.

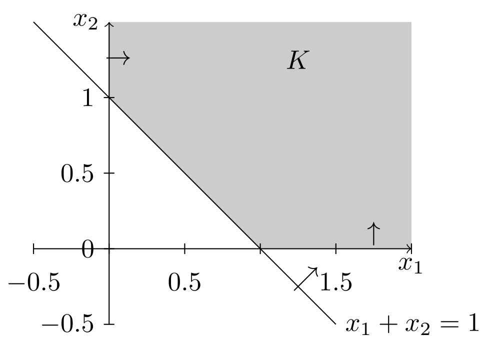
Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, um vector não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ diz-se uma *Direcção Ilimitada* de K se $(x + \lambda d) \in K$ para todo $x \in K$ e $\lambda \geq 0$. Como consequência imediata desta definição verificam-se as seguintes propriedades:

1. K é um conjunto ilimitado se e só se admite pelo menos uma direcção ilimitada.
2. d é uma direcção ilimitada se e só se αd é uma direcção ilimitada para todo número real $\alpha > 0$.
3. Se d^1 e d^2 são direcções ilimitadas, então $(\alpha_1 d^1 + \alpha_2 d^2)$ é uma direcção ilimitada para quaisquer números reais $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$.

Como ilustração desta definição e propriedades considere-se o conjunto K definido pelas restrições

$$x_1 + x_2 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

e representado geometricamente pela figura



O conjunto K é ilimitado e qualquer vector $d = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2$ com $\alpha_i \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ é uma direcção ilimitada de K.

O próximo teorema fornece uma caracterização algébrica de uma direcção ilimitada e uma condição necessária e suficiente para estabelecer se um poliedro convexo é ilimitado.

Teorema 4 *Seja* $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

1. *Um vector não nulo d é uma direcção ilimitada em K se e só se $Ad = 0$, $d \geq 0$.*
2. *K é limitado se e só se o sistema*
$$Ad = 0, \quad d \geq 0 \tag{14}$$
possui apenas a solução $d = 0$.

Demonstração. A propriedade 2. é consequência imediata de 1. e da definição de direcção ilimitada. Para demonstrar 1., seja d uma direcção ilimitada de K. Então para qualquer $x \geq 0$ satisfazendo $Ax = b$ tem-se

$$A(x + \lambda d) = b, \quad x + \lambda d \geq 0$$

para todo $\lambda \geq 0$. Então

$$\lambda(Ad) = 0, \quad \lambda d \geq -x$$

para quaisquer $x \in K$ e $\lambda \geq 0$. Portanto $Ad = 0$ e $d \geq 0$. Por outro lado se uma direcção não nula $d \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $Ad = 0$, $d \geq 0$, então para quaisquer $x \in K$ e $\lambda \geq 0$ vem

$$A(x + \lambda d) = Ax + \lambda(Ad) = Ax = b$$

$$x + \lambda d \geq x \geq 0$$

Donde $(x + \lambda d) \in K$ para todo $\lambda \geq 0$ e d é uma direcção ilimitada. $\square$

Como exemplo de ilustração deste teorema, considere-se o conjunto K definido pelas restrições

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Então $d = (1, 1, 1)$ é solução do sistema (14) e portanto é direcção ilimitada de K, que por sua vez não é limitado.

O próximo teorema mostra que qualquer ponto de um poliedro convexo K se pode escrever como combinação linear dos seus pontos extremos e de uma direcção ilimitada (se K é ilimitado). A sua demonstração aparece em [Nash and Sofer, 1996] e não será apresentada nestes apontamentos.

Teorema 5 *Se $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ e $x^1, x^2, \ldots, x^k$ são os seus pontos extremos, então $x \in K$ se e só se*

$$x = d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

com λ_i números reais tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

e $d = 0$ ou d é uma direcção ilimitada.

Como consequência imediata deste teorema pode afirmar-se que se K é limitado, então qualquer um dos seus pontos é combinação convexa dos seus pontos extremos.

Considere-se agora o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{15}$$

com $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de característica $m < n$. O resultado anterior permite estabelecer o seguinte teorema fundamental para a resolução de um programa linear.

Teorema 6 *O programa linear (15) tem uma solução óptima num ponto extremo (solução básica admissível) ou então a função objectivo é ilimitada inferiormente no seu conjunto admissível.*

Demonstração. Sejam $x^1, x^2, \ldots, x^k$ os pontos extremos do conjunto admissível K e seja x^t o ponto extremo de K tal que

$$c^T x^t = \min\{c^T x^i : \ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

Iremos estabelecer o teorema, mostrando que, ou $c^T x$ tende para $(-\infty)$ em K ou então x^t é solução óptima do programa dado. Para qualquer $x \in K$, podemos escrever

$$x = d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

com $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ e $d \geq 0$ uma direcção ilimitada. Consideremos primeiro o caso em que $c^T d < 0$. Para qualquer $\alpha \geq 0$,

$$x_\alpha = \alpha d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$$

é uma solução admissível do programa. Com efeito, como $x^i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $Ad = 0$, $d \geq 0$, $\alpha \geq 0$, tem-se

$$x_\alpha = \alpha d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \geq 0$$

$$Ax_\alpha = \alpha A d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A x^i = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) b = b$$

Além disso como $c^T d < 0$, então

$$c^T x_\alpha = \alpha c^T d + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$$

tende para $(-\infty)$ à medida que α aumenta. Portanto a função tende para $(-\infty)$ no seu conjunto admissível. Consideremos agora que $c^T d \geq 0$. Então,

$$c^T x \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(c^T x^t \right) = c^T x^t \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) = c^T x^t$$

Donde x^t é solução óptima do programa e isso demonstra o teorema. □

Como ilustração deste teorema, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize z} = & 2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Os vectores

$$x^1 = (1, 0, 0), \quad x^2 = (0, 1, 0), \quad x^3 = (0, 0, 1)$$

são os pontos extremos do conjunto admissível desse programa. Além disso esse conjunto é limitado pelo que não existe qualquer direcção ilimitada. Como

$$c^T x^1 = 2, \quad c^T x^2 = 1, \quad c^T x^3 = 0$$

e

$$c^T x^3 = \min\{c^T x^i : i = 1, 2, 3\}$$

então, pela demonstração do teorema anterior, x^3 é solução óptima do programa dado. Este processo de determinação da solução óptima a partir da determinação de todos os pontos extremos do conjunto de restrições é em geral impraticável. Com efeito, o número de pontos extremos do conjunto de restrições do programa é muito elevado. No entanto, o teorema anterior sugere a determinação da solução óptima de um programa linear a partir de uma pesquisa inteligente do conjunto dos pontos extremos de K. Essa é a ideia do método de simplex que será objecto de estudo numa das próximas secções. Finalmente é importante acrescentar que este teorema é também verdadeiro para programas lineares na forma normal com condições de limites.

10 Caracterização Algébrica duma Solução Básica Admissível Óptima

Nesta secção iremos apresentar uma caracterização algébrica duma solução básica admissível óptima, que será de extrema importância na resolução de programas lineares. Consideremos um programa linear na forma normal simples

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Seja K o seu conjunto admissível. Se $\overline{x}$ é um ponto extremo associado a uma solução básica admissível do conjunto J, então

$$\overline{x} = (\overline{x}_J, 0)$$

com

$$B\overline{x}_J = b$$

e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é uma matriz não singular. Portanto o sistema

$$B^T \pi = c_J \tag{16}$$

tem também uma solução única. Além disso $A = [B\ N]$, com $N = [A_{\cdot j}]_{j \in L}$ e $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$. Então para qualquer solução admissível x tem-se

$$Bx_J + Nx_L = b$$

ou seja,

$$x_J = B^{-1}b - B^{-1}Nx_L$$

Portanto

$$c^T x - c^T \overline{x} = c_J^T(x_J - \overline{x}_J) + c_L^T x_L = c_J^T B^{-1} b + (c_L^T - c_J^T B^{-1} N)x_L - c_J^T B^{-1} b = \sum_{j \in L} \left(c_j - \pi^T A_{\cdot j}\right) x_j$$

com π o vector definido por (16). Podemos então enunciar o seguinte resultado.

Teorema 7 *Uma solução básica admissível* $(\overline{x}_J, 0)$ *de base* $B = [A_{.j}]_{j \in J}$ *é uma solução óptima de um programa linear na forma normal se e só se o vector* π *definido por*

$$B^T \pi = c_J$$

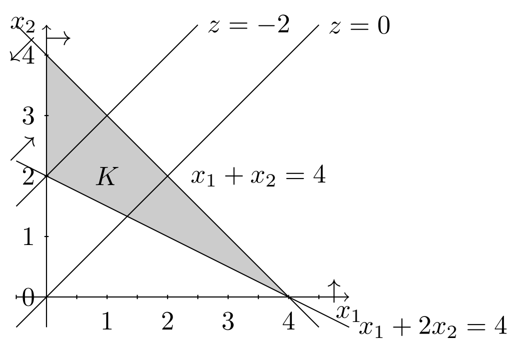
satisfaz

$$c_j - \pi^T A_{.j} \geq 0, \ \textit{para todo } j \notin J.$$

Este teorema fornece uma caracterização algébrica simples para uma solução básica admissível ser uma solução óptima de um programa linear na forma normal. A título de exemplo, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize z} = & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + \ \ x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Resolvendo graficamente este programa,



facilmente se conclui que

$$\overline{x} = (0, 4)$$

é solução óptima do programa. Consideremos agora a forma normal do programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ & x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 4 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Então o ponto extremo tem associado uma e uma só solução básica admissível $\overline{x} = (0, 4, 0, 4)$ definida pelo conjunto $J = \{2, 4\}$. Portanto a matriz base é

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema $B^T \pi = c_J$ é obtida a partir de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\pi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 1 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

$$c_3 - \pi^T A_{\cdot 3} = 0 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \geq 0$$

então $\overline{x}$ é a solução óptima do programa dado.

Notar que um ponto extremo pode ser solução óptima e haver uma solução básica admissível que não satisfaça as condições do teorema anterior. Essa situação só pode ocorrer quando o ponto extremo tiver associada mais do que uma solução básica admissível degenerada. A título de exemplo consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ & x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Da figura anterior, imediatamente se conclui que $\widetilde{x} = (4, 0)$ é o ponto extremo óptimo desse programa. Se considerarmos a solução básica admissível associada a $J = \{1, 2\}$ tem-se

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto π satisfaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\pi = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$c_3 - \pi^T A_{\cdot 3} = 0 - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$$

e portanto a solução básica admissível satisfaz as condições do teorema anterior. Contudo se considerarmos $J = \{1, 3\}$, vem

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto π é determinado a partir de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como

$$c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

então a solução básica admissível definida por $J = \{1, 3\}$ e associada ao ponto extremo óptimo não satisfaz as condições do teorema anterior.

Como iremos ver mais adiante, é também fácil de caracterizar uma solução básica admissível óptima de um programa linear na forma normal geral. A simplicidade da caracterização algébrica de uma solução básica admissível e do processo de verificação da sua optimalidade tornaram muito úteis os algoritmos baseados nesse tipo de soluções. Como veremos mais adiante, o método de simplex é um processo que apenas usa soluções básicas admissíveis e é ainda actualmente o método mais utilizado na prática para resolver programas lineares.

11 Dualidade Linear

Dado o programa linear, designado por *Primal*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{17}$$

define-se o correspondente *Dual* como o seguinte programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w = & b^T u \\ \text{Sujeito a} & A^T u \leq c \end{array} \tag{18}$$

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ então verificam-se as seguintes correspondências entre os dois programas

	PRIMAL	DUAL
n^o de restrições	m	n
n^o de variáveis	n	m
Variáveis e Restrições	variáveis ≥ 0	restrições de $\leq$
	restrições de igualdade	variáveis sem restrição
Matriz	A	A^T
Coeficientes de custo	c	b
Termos independentes	b	c

É fácil construir o dual de um programa linear tendo em conta estas correspondências. Assim, por exemplo, considere-se o seguinte programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z & = x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ & 2x_1 \qquad + \ \ x_3 = -1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

De acordo com as relações apresentadas na tabela, o dual terá duas variáveis u_1 e u_2 sem restrição de sinal e três desigualdades do tipo "$\leq$". As correspondências entre as matrizes, coeficientes de custo e termos independentes dos dois programas apresentadas na tabela anterior sugere que para construir o dual se deve começar por colocar no primal entre parêntesis as variáveis e os tipos de restrições do dual nos locais indicados a seguir e ler o programa dual de baixo para cima. Assim, relativamente ao caso anterior o primal surge com a seguinte forma

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize } z & = x_1 + x_2 - x_3 & \\ & \ \ (\leq)\ \ (\leq)\ \ (\leq) & \\ \text{Sujeito a} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 & (u_1) \\ & 2x_1 \qquad + \ \ x_3 = -1 & (u_2) \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 & \end{array}$$

A partir desta estrutura, a construção do dual é feita tal como descrita, obtendo-se

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w & = u_1 - u_2 \\ \text{Sujeito a} & \quad u_1 + 2u_2 \leq 1 \\ & -2u_1 \qquad\quad \leq 1 \\ & \quad 3u_1 + \ \ u_2 \leq -1 \end{array}$$

Suponhamos agora que o programa primal contém uma desigualdade. Dado que no dual existem desigualdades do tipo $\leq$, iremos supor que essa desigualdade é da forma $\geq$. Então o programa linear terá a forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x \\ \text{Sujeito a} & A_1 x \geq b_1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Introduzindo a variável de folga x_{n+1} nessa desigualdade, obtemos o programa equivalente

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x + 0x_{n+1} \\ \text{Sujeito a} & A_1 x - x_{n+1} = b_1 \\ & x \geq 0, \ x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

O dual desse programa é

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w = & b_1 u_1 \\ \text{Sujeito a} & A_1^T u_1 \leq c \\ & -u_1 \leq 0 \end{array}$$

Portanto $u_1 \geq 0$. Provámos assim que a variável dual correspondente a uma restrição de desigualdade $\geq$ do primal tem restrição de sinal.

Consideremos agora o caso de um programa linear com uma restrição de igualdade e uma variável sem restrição de sinal, isto é

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x + c_{n+1} x_{n+1} \\ \text{Sujeito a} & a^T x + a_{n+1} x_{n+1} = b_1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Se escrevemos x_{n+1} na forma $x_{n+1} = x'_{n+1} - x''_{n+1}$, com $x'_{n+1}, x''_{n+1} \geq 0$, obtemos o programa equivalente

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x + c_{n+1} x'_{n+1} - c_{n+1} x''_{n+1} \\ \text{Sujeito a} & a^T x + a_{n+1} x'_{n+1} - a_{n+1} x''_{n+1} = b_1 \\ & x \geq 0, \ x'_{n+1}, x''_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

O dual tem então a forma

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w = & b_1 u_1 \\ \text{Sujeito a} & a u_1 \leq c \\ & a_{n+1} u_1 \leq c_{n+1} \\ & -a_{n+1} u_1 \leq -c_{n+1} \end{array}$$

Das últimas duas desigualdades, vem

$$a_{n+1} u_1 = c_{n+1}$$

Mostrámos assim que a toda a variável sem restrição de sinal no primal corresponde uma igualdade no dual.

Podemos assim considerar as seguintes correspondências adicionais

PRIMAL	DUAL
desigualdade do tipo "$\geq$"	variável ≥ 0
variável sem restrição	restrição de igualdade

Tendo em conta as relações anteriores, o problema primal

$$\begin{array}{lllll}
\text{Minimize } z & = x_1 - x_2 & & & \\
 & (\leq)\ (=)\ (\leq) & & & \\
\text{Sujeito a} & \ \ x_1 + 2x_2 & \geq 1 & & (u_1 \geq 0) \\
 & -x_1 - \ x_2 + x_3 & = 0 & & (u_2) \\
 & x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0 & & &
\end{array}$$

tem associado o seguinte dual

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize } w & = u_1 \\
\text{Sujeito a} & \ \ u_1 - u_2 \leq 1 \\
 & 2u_1 - u_2 = -1 \\
 & \qquad u_2 \leq 0 \\
 & u_1 \geq 0
\end{array}$$

Finalmente, para um problema de minimização (maximização), qualquer restrição do primal do tipo "$\leq$" ("$\geq$") é transformada numa restrição do tipo "$\geq$" ("$\leq$") antes de se determinar a respectiva formulação dual. Os valores das variáveis duais (primais) associadas às restrições "$\leq$" ("$\geq$") são simétricos dos das correspondentes variáveis do dual (primal) obtido usando as transformações dessas restrições de desigualdade. Como exemplo final do dual de um programa linear, considere-se

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimize } z = & c^T x \\
\text{Sujeito a} & Ax \geq b \\
 & x \geq 0
\end{array}$$

Então o seu dual tem a forma

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximize } w = & b^T u \\
\text{Sujeito a} & A^T u \leq c \\
 & u \geq 0
\end{array}$$

Esses dois programas dizem-se *Duais Canónicos*. Seguidamente estabelecem-se algumas propriedades dos programas duais. Nessa discussão usar-se-ão os programas (17) e (18), mas é importante notar que as várias propriedades a estabelecer permanecem válidas para outro tipo de restrições. Assim da definição de programas duais, obtém-se imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 8 *O dual do dual de um programa linear é o programa primal.*

Além disso

Teorema 9 (Dualidade Fraca) *Se $K_P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ e $K_D = \{u \in \mathbb{R}^m : A^T u \leq c\}$ são os conjuntos admissíveis do primal e do dual respectivamente, então para quaisquer $x \in K_P$ e $u \in K_D$ tem-se*

$$b^T u \leq c^T x$$

Demonstração. Se $x \in K_P$ e $u \in K_D$ então

$$b^T u = (Ax)^T u = x^T A^T u \leq x^T c = c^T x$$

pois $x \geq 0$ e $A^T u \leq c$. $\square$

Este teorema mostra que o valor da função de qualquer solução admissível do primal (dual) é um limite superior (inferior) do valor de qualquer solução admissível do dual (primal), para um problema de minimização, isto é, tem-se o seguinte esquema

Valores de soluções admissíveis do dual	Valores de soluções admissíveis do primal

Desta forma é normal que soluções óptimas do primal e do dual tenham o mesmo valor óptimo. Esse resultado constitui o chamado *Teorema Fundamental da Dualidade Linear* ou *Teorema da Dualidade Forte* que seguidamente se apresenta.

Teorema 10 *O primal tem solução óptima de valor $\overline{z}$ se e só se o dual tem solução óptima de valor $\overline{w}$ e além disso $\overline{z} = \overline{w}$.*

Demonstração. Como o dual do dual de um programa linear é o primal, então basta provar que se o primal (17) tem uma solução óptima de valor $\overline{z}$, o dual (18) tem uma solução óptima de valor $\overline{z} = \overline{w}$.

Se o programa (17) tem solução óptima, então existe uma solução óptima básica admissível $\overline{x}$ para esse programa. Então, pelo teorema 7, existe um conjunto $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ para o qual a matriz base $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ e o vector $\pi \in \mathbb{R}^m$ satisfazem

$$B\overline{x}_J = b, \quad \overline{x}_L = 0, \quad \overline{z} = c_J^T B^{-1} b$$

$$B^T \pi = c_J, \quad \overline{c}_L = c_L - N^T \pi \geq 0$$

com $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$ e $N = [A_{\cdot j}]_{j \in L}$. A demonstração do teorema consiste em provar que π é uma solução óptima do dual. Para isso note-se que

$$A^T \pi = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} B^T \pi \\ N^T \pi \end{bmatrix}$$

Mas $B^T \pi = c_J$ e $N^T \pi - c_L = -\overline{c}_L \leq 0$. Portanto

$$A^T \pi \leq c$$

e π é uma solução admissível do dual (18). Além disso

$$\overline{w} = b^T \pi = b^T B^{-T} c_J = c_J^T B^{-1} b = \overline{z}$$

Do teorema anterior tem-se o seguinte resultado

$$b^T u \leq \overline{z}$$

em qualquer solução dual admissível. Então

$$b^T u \leq b^T \pi$$

Portanto π é solução óptima do dual (18) e isso prova o teorema. □

Como consequência destes dois últimos teoremas podem-se enunciar os seguintes resultados.

Teorema 11 *1. Se o primal é ilimitado inferiormente, então o dual é não admissível.*

2. Se o dual é ilimitado superiormente, então o primal é não admissível.

Para justificar a validade deste teorema basta notar que o valor $\overline{z}$ de qualquer solução admissível do primal é maior ou igual do que o valor $\overline{w}$ de qualquer solução admissível do dual.

Teorema 12 *Se ambos os programas primal e dual são admissíveis, então ambos os programas têm soluções óptimas e os valores óptimos são iguais.*

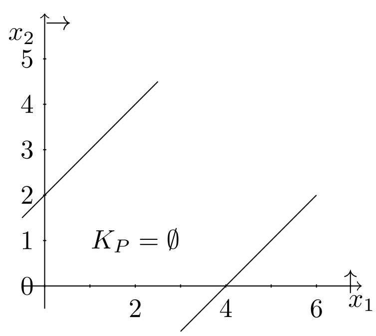
Com efeito se ambos os programas são admissíveis, então a função objectivo do primal é limitada inferiormente. Desta forma é garantida a solução óptima para o primal, já que a respectiva função objectivo não pode tender para $(-\infty)$. O resultado surge agora como consequência imediata do teorema fundamental da dualidade. Como consequência dos dois teoremas anteriores, verifica-se o seguinte resultado.

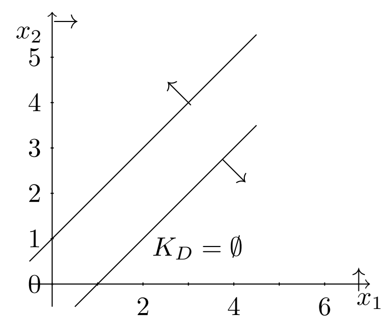
Teorema 13 *Se o primal (dual) é admissível então é ilimitado se e só se o dual (primal) é inadmissível.*

Notar que pode acontecer que ambos os programas lineares sejam não admissíveis, conforme mostra o seguinte exemplo

<u>Primal</u>:
$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & -x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 - x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

<u>Dual</u>:
$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w = & 2u_1 + 4u_2 \\ \text{Sujeito a} & -u_1 + u_2 \leq -1 \\ & u_1 - u_2 \leq -1 \end{array}$$





12 Complementaridade e Algoritmos Primais, Duais e Primais-Duais

Consideremos novamente os programas primal e dual na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & b^T u \\ \text{Sujeito a} & A^T u + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

Se ambos os programas são admissíveis, então, pelo teorema 12, ambas têm soluções óptimas $\overline{x}$ e $(\overline{u}, \overline{s})$ tais que

$$c^T \overline{x} = b^T \overline{u}$$

Mas para quaisquer soluções admissíveis x, (u, s) dos dois programas, têm-se

$$c^T x - b^T u = (A^T u + s)^T x - (Ax)^T u = u^T (Ax) + s^T x - (Ax)^T u = s^T x \geq 0$$

e portanto verifica-se o seguinte resultado.

Teorema 14 (*Complementaridade das Variáveis de Folga*) *$\overline{x}$ é uma solução óptima do primal e $(\overline{u}, \overline{s})$ é uma solução óptima do dual se e só se $\overline{x}$ é admissível do primal, $(\overline{u}, \overline{s})$ é admissível do dual e $\overline{s}^T\overline{x} = 0$.*

Como

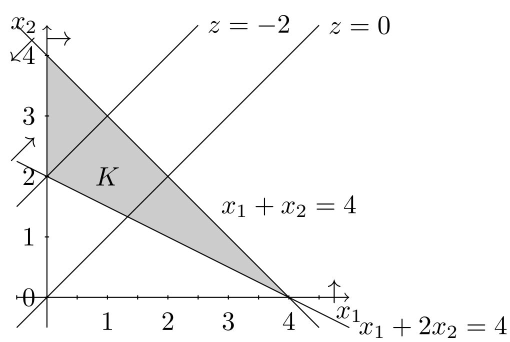
$$s^T x = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i$$

e $s \geq 0$, $x \geq 0$, então

$$s^T x = 0 \Leftrightarrow s_i x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Portanto se numa solução óptima $x_i > 0$ ($s_i > 0$), então $s_i = 0$ ($x_i = 0$) para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Isto significa que se para uma solução óptima de um dos dois programas duais uma desigualdade é satisfeita estritamente, então a correspondente restrição do seu dual é satisfeita como igualdade. Esse resultado tem consequências importantes na resolução dos programas primal e dual. A título de exemplo, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + \;\; x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$



Transformando a primeira desigualdade em $\geq$ e aplicando as regras de construção do programa dual, obtém-se o seguinte dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & -4u_1 + 4u_2 \\ \text{Sujeito a} & -u_1 + \;\; u_2 \leq 1 \\ & -u_1 + 2u_2 \leq -1 \\ & u_1 \geq 0, \;\; u_2 \geq 0 \end{array}$$

A solução óptima do primal é $\overline{x} = (0, 4)^T$. Como

$$\begin{array}{rcl} \overline{x}_2 & > & 0 \\ \overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 & > & 4 \end{array}$$

então pelo teorema anterior, qualquer solução óptima do dual satisfaz

$$\begin{array}{rcr} -u_1 + 2u_2 & = & -1 \\ u_2 & = & 0 \end{array}$$

Donde $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ e portanto $u = (-1 \; 0)^T$ é solução óptima do dual. Este exemplo indica que é muitas vezes fácil determinar a solução óptima do dual a partir do primal e vice-versa. Além disso, o teorema 14 também fornece uma condição primal-dual de optimalidade para $\overline{x}$ ser uma solução óptima de um programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{19}$$

Com efeito do teorema anterior obtém-se imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 15 *$\overline{x}$ é solução óptima do programa linear (19) se e só se existem $\overline{u}$ e $\overline{s}$ tais que $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{s})$ são soluções do sistema*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T u + s &= c \\ x \geq 0, &\quad s \geq 0 \\ x^T s &= 0 \end{aligned}$$

Baseada neste teorema, a terminologia de programação linear distingue três grandes classes de algoritmos:

1. *Algoritmo Primal* – mantém em cada iteração a admissibilidade primal ($Ax = b$, $x \geq 0$) e a complementaridade ($x_i s_i = 0$ para todo i) e termina quando obtém admissibilidade dual ($A^T u + s = c$ e $s \geq 0$).

2. *Algoritmo Dual* – mantém em cada iteração a admissibilidade dual ($A^T u + s = c$, $s \geq 0$) e a complementaridade ($x_i s_i = 0$ para todo i) e termina quando obtém admissibilidade primal ($Ax = b$, $x \geq 0$).

3. *Algoritmo Primal-Dual* – procura obter uma solução satisfazendo as condições do teorema 15, com ou sem exigência da admissibilidade primal ou dual em cada iteração.

O método simplex é o algoritmo primal mais conhecido para a resolução de programas lineares. Nas próximas secções iremos discutir com bastante detalhe esse algoritmo, assim como a sua versão dual, denominada método dual-simplex.

13 Método Primal Simplex

Este processo é um algoritmo primal que apenas utiliza soluções básicas admissíveis em cada iteração. Para a sua descrição, precisamos apenas de explicar o procedimento de passagem de uma solução básica admissível para outra. Como iremos ver, tal vai ser sempre possível desde que a solução básica corrente não seja óptima ou não houver uma indicação de que o programa linear é ilimitado inferiormente. Consideremos o programa linear na forma normal simples

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

com A uma matriz de ordem $m \times n$ de característica $m < n$. Se $\overline{x}$ representar uma solução básica admissível deste programa, então existe um conjunto J de m elementos tal que $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ para o qual $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é não singular. Se $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$, então os valores das variáveis do programa para esta solução básica são dados por

$$\begin{aligned} x_L &= 0 \\ x_J &= \overline{b} \end{aligned}$$

onde

$$B\overline{b} = b$$

Além disso para $N = [A_{\cdot j}]_{j \notin J}$ tem-se

$$\begin{aligned} x_J &= B^{-1}b - B^{-1}N x_L \\ z &= c_J^T B^{-1} b + (c_L - c_J^T B^{-1} N) x_L \end{aligned} \tag{20}$$

Como $x_L = 0$ na solução dada, o valor da função objectivo na referida solução é igual a

$$\overline{z} = c_J^T B^{-1} b \tag{21}$$

Seja agora $\pi \in \mathbb{R}^m$ o vector definido por

$$B^T \pi = c_J \tag{22}$$

Então de (20) e (21), vem

$$\overline{z} = ((B^{-1})^T c_J)^T b = \pi^T b$$

e

$$z = \overline{z} + \sum_{j \in L} \left(c_j - \pi^T A_{\cdot j} \right) x_j$$

Donde

$$z = \overline{z} + \sum_{j \in L} \overline{c}_j x_j \tag{23}$$

com

$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j}, \quad \overline{z} = \pi^T b \tag{24}$$

Como vimos anteriormente, a solução básica é óptima se $\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$. De outro modo calcule-se o índice s tal que

$$\overline{c}_s = \min\{\overline{c}_i : \; i \in L, \; \overline{c}_i < 0\} \tag{25}$$

Para satisfazer o objectivo do programa a variável x_s deve aumentar o seu valor. Porém, como todas as outras variáveis não básicas se mantêm nulas, tem-se por (20) que

$$x_J = \overline{b} - (B^{-1} A_{\cdot s}) x_s$$

Se

$$B \overline{A}_{\cdot s} = A_{\cdot s}$$

então a relação anterior pode ser escrita na forma

$$x_J = \overline{b} - \overline{A}_{\cdot s} x_s \tag{26}$$

Se $\overline{A}_{\cdot s} \leq 0$ a função objectivo tende para $-\infty$ no conjunto admissível do programa linear. De outro modo seja r tal que

$$\theta = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} : \overline{a}_{is} > 0 \right\} \tag{27}$$

Então o conjunto J é actualizado por

$$J = J - \{t\} \cup \{s\} \tag{28}$$

com t o índice da variável básica correspondente à linha r. As componentes de $\overline{b}$ são actualizadas, tendo em conta as fórmulas (26) e (28). Donde

$$\begin{aligned} \overline{b}_r &= \theta \\ \overline{b}_i &= \overline{b}_i - \overline{a}_{is}\theta, \quad i \neq r \end{aligned} \tag{29}$$

com θ dado por (27). Assim se obtém uma nova solução básica definida por $x_J = \overline{b}$ e $x_L = 0$, com $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$.

O método simplex baseia-se nas expressões (22)-(29) e consiste nos seguintes passos:

MÉTODO SIMPLEX

Passo 0: Sejam J, $L = \{1, 2, \dots, n\} - J$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ dados. Calcule $B\bar{b} = b$ ($\bar{b} \geq 0$). Faça $x_J = \bar{b}$ e $x_L = 0$.

Passo 1: Calcule

$$\begin{array}{rcl} B^T\pi & = & c_J \\ \bar{c}_j & = & c_j - \pi^T A_{\cdot j}, j \in L \\ \bar{z} & = & \pi^T b \end{array}$$

Passo 2: Se $\bar{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$, termine: $\big(x_J = \bar{b},\ x_L = 0\big)$ é a solução óptima do programa linear de valor óptimo $\bar{z}$. De outro modo seja

$$\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_i : \bar{c}_i < 0 \text{ e } i \in L\}$$

Passo 3: Calcule

$$B\overline{A}_{\cdot s} = A_{\cdot s}$$

Se $\bar{a}_{is} \leq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$, termine: a função linear é ilimitada inferiormente no conjunto admissível do programa. De outro modo, calcule

$$\theta = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0\right\}$$

Passo 4: Actualize J por

$$J = J - \{t\} \cup \{s\}$$

com t o índice da variável básica correspondente à linha r. Faça

$$\begin{array}{rcl} \bar{b}_r & = & \theta \\ \bar{b}_i & = & \bar{b}_i - \bar{a}_{is}\theta, \quad i \neq r \end{array}$$

Volte ao **Passo 1**.

Consideremos novamente o programa (19) que o método simplex resolve e o seu dual

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & b^T u \\ \text{Sujeito a} & A^T u + s = c \\ & s \geq 0 \end{array} \tag{30}$$

Em cada iteração do método simplex, a solução admissível $(x_J, 0)$ e a solução π satisfazem as seguintes condições

$$x_L = 0, \quad Bx_J = b$$

$$B^T\pi = c_J, \quad s_J = 0$$

Portanto

$$s^T x = s_J^T x_J + s_L^T x_L = 0$$

e a complementaridade é verdadeira em cada iteração. A admissibilidade é também mantida pelo processo, pois

$$A\begin{bmatrix} x_J \\ 0 \end{bmatrix} = Bx_J + Nx_L = b$$

$$x_J \geq 0, \quad x_L = 0$$

A solução óptima obtida pelo algoritmo satisfaz as restrições do dual, pois $s_J = 0$ e $s_L = c_L - N^T\pi \geq 0$. Assim se conclui que o método simplex é um algoritmo primal, que resolve o primal e o seu dual. Com efeito, se o método termina numa solução óptima do primal, então o correspondente vector π é a solução óptima do dual. Se a função linear é ilimitada, então o dual é inadmissível, devido ao teorema 13.

Para ilustração desta técnica considere-se o seguinte programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 + 4x_4 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Consideremos a solução básica inicial associada a $J = \{1,3\}$. Então $L = \{1,2,3,4\} - \{1,3\} = \{2,4\}$ e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso

$$B\bar{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{b}_1 = 1 \\ \bar{b}_2 = 1 \end{cases}$$

Portanto a solução básica

$$x_J = \bar{b}, \quad x_L = 0$$

é admissível e pode servir como solução inicial do método simplex. Assim no Passo 1 há que começar por resolver o sistema $B^T\pi = c_J$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Como $L = \{2,4\}$, vem

$$\bar{c}_2 = c_2 - \pi^T A_{\cdot 2} = -2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 4 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

Donde a solução dada não é óptima e $s = 2$. No Passo 3 resolve-se o sistema $B\overline{A}_{\cdot 2} = A_{\cdot 2}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{12} = -1 \\ \bar{a}_{22} = 2 \end{cases}$$

Então $\bar{a}_{22}$ é o único elemento positivo da coluna 2 e nesse caso $r = 2$. Como x_3 é a variável básica correspondente a $r = 2$, os conjuntos J e L são actualizados para

$$J = J - \{3\} \cup \{2\} = \{1,2\}, \quad L = \{3,4\}$$

e o vector $\bar{b}$ actualiza-se a partir de

$$\begin{cases} \bar{b}_2 = \theta = \dfrac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} = \dfrac{1}{2} \\ \bar{b}_1 = \bar{b}_1 - \theta\bar{a}_{12} = 1 - \dfrac{1}{2}(-1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

A nova solução básica é dada por $(x_J = \overline{b},\, x_L = 0)$, ou seja,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad x_3 = x_4 = 0 \tag{31}$$

Além disso a matriz base associada a essa solução é

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Voltando ao Passo 1, executa-se um nova iteração, começando por calcular o vector π a partir de $B^T \pi = c_J$, ou seja, por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \pi_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Então

$$\overline{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{c}_3 = c_3 - \pi^T A_{\cdot 3} = 0 - \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 4 - \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{9}{2}$$

Donde $\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$ e a solução definida por (31) é óptima, com valor óptimo igual a $\overline{z} = \frac{1}{2}$.

Da descrição dos passos do método simplex, facilmente se conclui que o processo move-se através de pontos extremos adjacentes do conjunto admissível e termina num número finito de iterações, desde que o valor do quociente mínimo θ seja positivo em cada iteração. Com efeito, se tal acontecer, o algoritmo visita pontos extremos diferentes com o valor da função objectivo a diminuir em cada iteração. Como o número de pontos extremos do poliedro convexo admissível é finito, então o algoritmo tem de possuir convergência finita. Por outro lado, o algoritmo converge para uma solução óptima que é um ponto extremo da região admissível ou então termina com a indicação que o programa linear é ilimitado. Se para um dado ponto extremo, a solução básica é degenerada, então pode acontecer que o algoritmo mude de solução básica admissível sem sair do mesmo ponto extremo e por conseguinte sem alterar o valor da função objectivo. Nesse caso o algoritmo pode efectuar um ciclo entre soluções básicas admissíveis associadas ao mesmo ponto extremo. Existem no entanto regras teóricas de escolha da solução básica admissível nesse caso que evitam a formação de ciclos e asseguram a convergência finita do algoritmo. Nestes apontamentos não iremos descrever essas regras e sugerimos o livro [Murty, 1995] para uma boa discussão desse assunto.

14 Fase 1 do Método Simplex

O método simplex necessita de uma solução básica admissível para se iniciar. A determinação de uma tal solução é um problema de complexidade semelhante à da resolução um programa linear. Esse processo é normalmente denominado de Fase 1 e existem várias versões desse processo que aparecem descritas em livros de programação linear [Murty, 1995]. Neste curso iremos apenas descrever uma versão muito simples da Fase 1 com uma única variável artificial.

Para descrição desse processo, consideremos uma solução básica $\overline{x} = [\overline{x}_J \ 0]^T$ associada a um conjunto J de variáveis básicas. Então $\overline{x}_J = \overline{b}$, com

$$B\overline{b} = b$$

e B a matriz base associada à solução básica. Se $\overline{b} \geq 0$, então a solução básica é admissível e não há necessidade de utilizar o processo Fase 1. De outro modo, considera-se o programa linear com uma variável artificial x_{n+1}:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & x_{n+1} \\ \text{Sujeito a} & Ax + (Bp)x_{n+1} = b \\ & x \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0 \end{array} \tag{32}$$

com $p \in \mathbb{R}^m$ o vector definido por

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \overline{b}_i \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad \overline{b}_i < 0 \end{cases}$$

Seja

$$\overline{b}_r = \min\{\overline{b}_i < 0\}$$

e consideremos a solução básica associada ao conjunto J definido por

$$\overline{J} = J - \{t\} \cup \{n+1\}$$

onde t é o índice da variável básica associada à linha r. Então é fácil de ver que a nova base $B = [A_{\cdot j}]_{j \in \overline{J}}$ é não singular e o sistema

$$B\overline{b} = b$$

tem uma solução $\overline{b} \geq 0$. Então a nova solução básica é admissível para o programa linear (32) e o método simplex pode ser utilizado com essa solução básica inicial. Como a função objectivo desse programa é limitada inferiormente, então o método simplex determina uma solução óptima $(\overline{x}, \overline{x}_{n+1})$ e há dois casos:

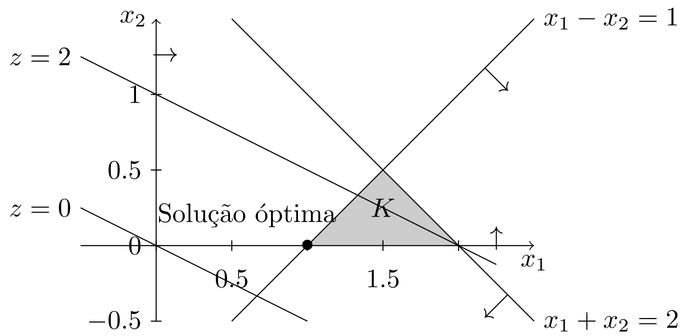
1. $\overline{x}_{n+1} = 0$ e é possível obter uma solução básica admissível para o programa original, por supressão da variável x_{n+1};

2. $\overline{x}_{n+1} > 0$ e o conjunto admissível do programa original é inadmissível.

Como exemplo de ilustração deste processo, considere-se o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

O conjunto admissível e a solução óptima desse programa são apresentados na figura a seguir



Incluindo as variáveis de desvio x_3 e x_4 podemos construir a forma normal do programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Se escolhermos como inicial a solução básica associada a $J = \{3, 4\}$, então

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Além disso

$$B\bar{b} = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \bar{b}_1 = 2 \\ \bar{b}_2 = -1 \end{cases}$$

Então a solução básica (0, 0, 2, -1) não é admissível, sendo por isso necessário o uso da Fase 1. Notemos que essa solução básica corresponde ao ponto (0, 0) da figura, que não pertence ao conjunto admissível do programa dado. Considere-se então

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Bp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o programa linear da Fase 1

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \qquad\qquad\qquad\quad x_5 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 + x_5 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

Como $\bar{b}_2 = \min\{\bar{b}_i < 0\}$, o conjunto J é actualizado por

$$J = J - \{4\} \cup \{5\} = \{3, 5\}$$

A solução básica é definida por

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{3, 5\}, \quad L = \{1, 2, 4\}$$

e é admissível para o programa linear da Fase 1. Para minimizar x_5 começa-se por calcular π a partir de

$$B^T\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Então os coeficientes de custo $\bar{c}_j$, $j \in L$ são obtidos por

$$\bar{c}_1 = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\bar{c}_2 = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\bar{c}_4 = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

permitindo estabelecer que $s = 1$. Por isso calcula-se a transformada $\overline{A}_{\cdot 1}$ da coluna $A_{\cdot 1}$, ou seja

$$B\overline{A}_{\cdot 1} = A_{\cdot 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a}_{11} = 1 \\ \bar{a}_{21} = 1 \end{cases}$$

A linha r é determinada pelo Critério do Quociente Mínimo

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1 \Rightarrow r = 2$$

estabelecendo que a variável x_5 sai da base por troca com x_1 e obtendo-se a solução básica admissível associada a $J = \{3, 1\}$. Donde

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e o vector $\bar{b}$ é actualizado por

$$\begin{cases} \bar{b}_2 = \theta = 1 \\ \bar{b}_1 = \bar{b}_1 - \theta \bar{a}_{11} = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Donde $x_5 = 0$ e a Fase 1 termina com $x = (1, 0, 1, 0)$, correspondente ao ponto $(1, 0)$ da figura, que pertence ao conjunto admissível do programa dado. O método simplex pode então ser aplicado para resolver o programa linear dado iniciando com essa solução básica admissível. Calcule-se então π através de $B^T \pi = c_J$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\bar{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Para $j \notin J$ tem-se $\bar{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j}$, isto é,

$$\bar{c}_2 = 2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_4 = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

Então $\bar{c}_j \geq 0$ para todo $j \notin J$ e a solução básica $(x_J = \bar{b},\ x_L = 0)$ é óptima. Donde

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = x_4 = 0$$

é a solução óptima do programa dado com valor óptimo $\bar{z} = 1$.

Como exemplo de um programa linear inadmissível, consideremos o problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Para procurar determinar uma solução admissível desse programa, consideremos a sua forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 2 \\ & 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Uma solução básica inicial é dada por $J = \{3,\ 4\}$. Então

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\overline{b} = [-2\ 1]^T$. Donde $x_3 < 0$ e a solução básica não é admissível. Considerando o vector $p = [-1\ 0]^T$ tem-se

$$Bp = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o programa linear da Fase 1 tem a forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & x_5 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

A solução básica associada a $J = \{4, 5\}$ é admissível para esse programa. Além disso

$$B\overline{b} = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Para determinar o mínimo da função objectivo, calcula-se π a partir de

$$B^T\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes de custo $\overline{c}_j$, $j \notin J$ são dados por

$$\overline{c}_1 = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\overline{c}_2 = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\overline{c}_3 = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Então $s = 1$ e calcula-se a transformada $\overline{A}_{\cdot 1}$ da coluna 1 de A por

$$B\overline{A}_{\cdot 1} = A_{\cdot 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a}_{11} = 2 \\ \overline{a}_{21} = 1 \end{cases}$$

A linha r é determinada como normalmente a partir de

$$\theta = \min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i1}} : \overline{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 1$$

Então x_4 sai da base por troca com x_1, obtendo-se a solução básica associada a $J = \{1, 5\}$. Portanto

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{cases} \bar{b}_2 = \theta = \dfrac{1}{2} \\ \bar{b}_1 = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right) 1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donde a solução básica associada a $J = \{1, 5\}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}, \ x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Como $x_5 > 0$, o processo Fase 1 ainda necessita de pelo menos mais uma iteração. Então

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{c}_2 = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{c}_3 = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\bar{c}_4 = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Então a solução básica é óptima para o programa Fase 1. Como $x_5 > 0$, o programa linear original é não admissível.

15 Método Dual Simplex

Considere-se novamente o programa linear primal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

O método simplex resolve este programa usando em cada iteração soluções básicas primal admissíveis, satisfazendo ($x_J = \bar{b} \geq 0$, $x_L = 0$), com J o conjunto dos índices das variáveis básicas, $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$, $B\bar{b} = b$. É também possível desenvolver um método dual simplex que apenas usa soluções básicas dual admissíveis e que também resolve em cada iteração dois sistemas com a matriz base B e a sua transposta. Seja dada uma solução básica dual admissível, com conjunto J associado e base $B = [A_{.j}]_{j \in J}$. Então

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T A_{.j} \geq 0$$

com $\pi \in \mathbb{R}^m$ o vector dado por

$$B^T \pi = c_J$$

Seja $\bar{b}$ o vector definido por

$$B\bar{b} = b$$

Se $\overline{b} \geq 0$, o método termina com a solução óptima ($x_J = \overline{b}$, $x_L = 0$), de valor óptimo $\overline{z} = \overline{b}^T\pi = \overline{c}_J^T\overline{x}_J$. De outro modo seja r o índice que satisfaz

$$\overline{b}_r = \min\{\overline{b}_i < 0\}$$

Da definição de solução básica, podemos escrever as variáveis básicas como função das variáveis não básicas

$$x_J = \overline{b} - \sum_{j \in L} x_j \overline{A}_{.j},$$

onde

$$B\overline{A}_{.j} = A_{.j},\ j \in L.$$

Se $\overline{a}_{rj} \geq 0$ para todo $j \in L$, então o programa linear é não admissível. De outro modo, e à semelhança do método primal simplex, o algoritmo dual simplex determina uma nova solução básica que se obtém da solução corrente por troca da variável básica x_t com uma variável não básica x_s. Seguidamente iremos explicar como essa variável x_s é calculada. Para isso começamos por escrever $z = c^T x$ e x_t como funções dessa variável x_s

$$z = \overline{z} + \sum_{j \in L - \{s\}} \overline{c}_j x_j + \overline{c}_s x_s, \tag{33}$$

$$x_t = \overline{b}_r + \sum_{j \in L - \{s\}} \overline{a}_{rj} x_j - \overline{a}_{rs} x_s. \tag{34}$$

Para efectuar a troca das variáveis x_s e x_t, isolamos x_s na equação (34), de modo a obter

$$x_s = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} - \sum_{j \in L - \{s\}} \frac{a_{rj}}{\overline{a}_{rs}} x_j - \frac{1}{\overline{a}_{rs}} x_t.$$

Substituindo na equação (33), vem

$$z = \left(\overline{z} + \frac{\overline{c}_s \overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}\right) + \sum_{j \in L - \{s\}} \left(\overline{c}_j - \frac{\overline{c}_s \overline{a}_{rj}}{\overline{a}_{rs}}\right) - \frac{\overline{c}_s}{\overline{a}_{rs}} x_t.$$

Então

$$z = (\overline{z} - \theta \overline{b}_r) + \sum_{j \in L - \{s\}} (\overline{c}_j + \theta \overline{a}_{rj}) x_j + \theta x_t,$$

com

$$\theta = \frac{\overline{c}_s}{-\overline{a}_{rs}}.$$

Como a nova solução básica tem de ser dual admissível e $\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$, então θ tem de satisfazer

1. $\theta \geq 0 \Rightarrow \overline{a}_{rs} < 0$,

2. $\overline{c}_j + \theta \overline{a}_{rj} \geq 0,\ \forall j \in L - \{s\} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\overline{c}_j}{-\overline{a}_{rj}}\ \forall j \in L - \{s\}$.

Portanto a nova solução básica é dual admissível se e só se

$$\theta = \min\left\{\frac{\overline{c}_j}{-\overline{a}_{rs}} :\ \overline{a}_{rj} < 0\right\} = \frac{\overline{c}_s}{-\overline{a}_{rs}} \tag{35}$$

Notar que este valor de θ existe sempre a não ser que o programa linear seja não admissível. Uma vez determinados θ e s a partir do critério do quociente mínimo (35), então os coeficientes de custo associados à nova solução básica são actualizados a partir de

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{c}_t = \theta \\ \overline{c}_j = \overline{c}_j + \theta \overline{a}_{rj},\ j \in L - \{s\} \end{array}\right. .$$

Além disso o valor da função objectivo correspondente à nova solução básica é actualizado por

$$\overline{z} = \overline{z} - \overline{b}_r\theta.$$

Notar ainda que, à semelhança do método primal simplex, o conjunto dos índices das variáveis básicas é actualizado a partir de

$$J = J - \{t\} \cup \{s\}.$$

Finalmente é fácil concluir que o valor da função objectivo aumenta se $\theta > 0$.

Para a descrição completa do método dual simplex falta apenas explicar como se calculam os coeficientes $\overline{a}_{rj}$, $j \in L$, introduzidos em (33). Se e^r é o vector r de base canónica, então

$$\overline{a}_{rj} = (e^r)^T\overline{A}_{.j} = (e^r)^T(B^{-1}A_{.j}) = (B^{-T}e^r)^T A_{.j}.$$

Portanto esses coeficientes são calculados a partir de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B^T\beta & = & e^r \\ \overline{a}_{rj} & = & \beta^T A_{.j},\ j \in L - \{s\}. \end{array} \right. \tag{36}$$

Os passos do algoritmo dual simplex são apresentados a seguir.

MÉTODO DUAL SIMPLEX

Passo 0: Sejam J, $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$ e $B = [A_{.j}]_{j \in J}$. Calcule

$$\begin{array}{rcl} B^T\pi & = & c_J \\ \bar{c}_j & = & c_j - \pi^T A_{.j}, \quad j \in L \\ \overline{z} & = & b^T\pi \end{array}$$

Notar que $\overline{c} \geq 0$ (a solução é dual admissível).

Passo 1: Calcule

$$B\overline{b} = b$$

$$x_J = \overline{b},\ x_L = 0$$

Se $\overline{b} \geq 0$, termine: ($\overline{x}_J = \overline{b}$, $\overline{x}_L = 0$) é solução óptima e o valor óptimo é $\overline{z}$.

De outro modo, seja

$$\overline{b}_r = \min\{\overline{b}_i :\ \overline{b}_i < 0\}$$

Passo 2: Calcule $\overline{a}_{rj}$, $j \in L$, a partir de

$$\begin{array}{rcl} B^T\beta & = & e^r \\ \overline{a}_{rj} & = & \beta^T A_{.j},\ j \in L \end{array}$$

Se $\overline{a}_{rj} \geq 0$ para todo $j \in L$, termine: o programa linear é não admissível. De outro modo determine s através de

$$\theta = \frac{\overline{c}_s}{-\overline{a}_{rs}} = \min\left\{\frac{\overline{c}_j}{-\overline{a}_{rs}} :\ \overline{a}_{rj} < 0,\ j \in L\right\}$$

Passo 3: Actualize J a partir de

$$J \rightarrow J - \{t\} \cup \{s\}$$

com t o índice da variável básica associada à r-ésima linha do quadro. Sejam $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$. Actualize os coeficientes $\overline{c}_j$, $j \in L$ através de

$$\begin{array}{rcl} \overline{c}_t & = & \theta \\ \overline{c}_j & = & \overline{c}_j + \theta \overline{a}_{rj} \\ \overline{z} & = & \overline{z} - \overline{b}_r \theta \end{array}$$

Volte ao **Passo 1**.

É interessante notar que o algoritmo dual simplex não fornece a solução óptima do dual do programa linear dado. Essa solução pode no entanto ser calculada a partir de $B^T \pi = c_J$, com J o conjunto dos índices das variáveis básicas da solução obtida. Além disso os coeficientes de custo reduzidos $\overline{c}_j$ permitem calcular as variáveis de folga da solução óptima do dual. Com efeito os valores dessas variáveis são os seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_j = 0, & j \in J \\ s_j = \overline{c}_j, & j \in L \end{array} \right. .$$

Seguidamente apresenta-se um exemplo de ilustração do método dual simplex. Considere-se o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + \ \ x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Introduzindo as variáveis de folga x_4 e x_5 obtemos a forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \qquad = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

Considere-se a solução básica inicial definida por

$$J = \{4, 5\}, \quad B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \{1, 2, 3\}$$

Essa solução é dual admissível, pois

$$B^T \pi = c_J \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{array} \right.$$

e para $j \in L$

$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j} = c_j \geq 0$$

No Passo 1 calcula-se $\overline{b}$ da seguinte forma

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{b}_1 = -1 \\ \overline{b}_2 = 1 \end{array} \right.$$

Donde $r = 1$. Para calcular $\overline{a}_{rj}$, $j \in L$ tem-se

$$B^T \beta = e^r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = 0 \end{array} \right.$$

e

$$\overline{a}_{rj} = \beta^T A_{\cdot j} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{a}_{11} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \\ \overline{a}_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \\ \overline{a}_{13} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \end{array} \right.$$

A determinação da coluna s envolve a expressão

$$\theta = \min\left\{\frac{\overline{c}_j}{-\overline{a}_{1j}} : j \in L,\quad \overline{a}_{1j} < 0\right\} = \min\left\{\frac{1}{-(-1)}, \frac{1}{-(-1)}, \frac{2}{-(-1)}\right\} = 1 \Rightarrow s = 1$$

permitindo concluir que $s = 1$. Então x_4 (variável na linha 1) troca com x_1, ou seja, J é actualizado da seguinte forma

$$J = J - \{4\} \cup \{1\} = \{1, 5\}$$

Donde $L = \{3, 4, 2\}$ e $B = [A_{.j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Os valores de $\overline{c}_j$, $j \in L$ são actualizados a partir de

$$\begin{cases} \overline{c}_4 = \theta = 1 \\ \overline{c}_2 = \overline{c}_2 + \theta \overline{a}_{12} = 1 - 1 = 0 \\ \overline{c}_3 = \overline{c}_3 + \theta \overline{a}_{13} = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Na iteração seguinte calcula-se $\overline{b}$ por

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \overline{b}_1 = 1 \\ \overline{b}_2 = 0 \end{cases}$$

Donde a solução básica é admissível e portanto é óptima. Essa solução é definida por $(\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0)$, ou seja,

$$x_1 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

e o valor óptimo da função é

$$\overline{z} = c_J^T \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Se se pretendesse determinar a solução óptima do dual, haveria a necessidade de resolver o sistema $B^T \pi = c_J$. Portanto essa solução satisfaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 1 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

Além disso os valores das variáveis de folga da solução óptima do dual são

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = s_5 = 0 \\ s_3 = s_4 = 1 \end{cases}$$

Tal como o método primal simplex, também o método dual simplex termina num número finito de iterações desde que o valor do quociente mínimo θ seja positivo em cada iteração. Com efeito, nesse caso o valor da função aumenta sempre e a finitude do número de pontos extremos garante a convergência finita do processo. Os casos degenerados em que o algoritmo visita um ponto extremo associado a várias soluções básicas admissíveis pode provocar algumas complicações à convergência do método, que são ultrapassadas por técnicas semelhantes às usadas para a versão primal do algoritmo.

O método dual simplex necessita de uma solução dual admissível para se iniciar ($\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$). Apesar de ser possível desenvolver um processo Fase 1 semelhante à do método primal simplex, na prática o método dual é essencialmente usado em programas lineares para os quais é fácil determinar uma solução dual admissível.

O método dual simplex é um algoritmo dual. Com efeito, se considerarmos o programa linear (19) e o seu dual (30), então em cada iteração do processo verificam-se as seguintes condições

$$x_L = 0, \quad Bx_J = b$$

$$B^T\pi = c_J, \quad s_J = 0, \quad s_L = c_L - N^T\pi \geq 0$$

Portanto

$$s^T x = s_J^T x_J + s_L^T x_L = 0$$

$$A^T\pi + s = c, \quad s \geq 0$$

e a complementaridade e a admissibilidade dual são mantidas em cada iteração. Se $x_J \geq 0$, então a admissibilidade primal é satisfeita e obtêm-se as soluções óptimas do primal $(x_J, 0)$ e do dual π. Se o algoritmo não conseguir obter uma solução básica satisfazendo $x_J \geq 0$, então o primal é não admissível e, pelo teorema 13, o dual é ilimitado.

Como exemplo de ilustração deste último caso, consideremos o programa linear não admissível, já resolvido anteriormente na secção 14,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 2 \\ & 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

É fácil de ver que a solução básica associada a $J = \{3, 4\}$ e $L = \{1, 2\}$ é dual admissível. Com efeito tem-se

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B^T\pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = 0$$

Portanto

$$\bar{c}_1 = c_1 = 1 \geq 0$$

$$\bar{c}_2 = c_2 = 1 \geq 0$$

Na primeira iteração do método dual simplex, calcula-se o vector $\bar{b}$ a partir de

$$B\bar{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então $r = 1$ e $t = 3$. Para calcularmos os elementos $\bar{a}_{rj}$ tem-se

$$B^T\beta = e^1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{a}_{r1} = \beta^T A_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\bar{a}_{r2} = \beta^T A_{\cdot 2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Portanto

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{rj}} : j \in L, \quad \bar{a}_{rj} < 0 \right\} = 1 \Rightarrow s = 1$$

Então a variável não básica x_1 troca com a variável básica x_3 e obtém-se uma nova solução básica associada a $J = \{1, 4\}$ e $L = \{2, 3\}$. Donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e os coeficientes de custo reduzidos $\overline{c}_j$, $j \in L$ são actualizados a partir de

$$\overline{c}_3 = 1$$

$$\overline{c}_2 = 1 + 1 = 2$$

É agora necessário verificar se esta solução básica é primal admissível. Para isso calcula-se $\overline{b}$ a partir de

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Então a solução básica

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = x_3 = 0$$

é primal não admissível e uma nova iteração tem de ser efectuada. Procedendo como anteriormente, tem-se $r = 2$, $t = 4$ e determinam-se os elementos $\overline{a}_{2j}$, $j \in L$ por

$$B^T\beta = e^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{a}_{22} = \beta^T A_{\cdot 2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\overline{a}_{23} = \beta^T A_{\cdot 3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

Portanto $\overline{a}_{2j} \geq 0$ para todo $j \in L$ e o algoritmo termina com a indicação que o programa linear é primal inadmissível (e o dual é ilimitado).

16 Implementação dos Métodos Primal e Dual Simplex

Como explicámos anteriormente, em cada iteração do método (primal ou dual) simplex é necessário:

1. Resolver dois sistemas de equações lineares com as matrizes B e B^T.
2. Actualizar a matriz B por substituição da coluna $A_{\cdot t}$ referente à variável básica ($t \in J$) x_t pela coluna $A_{\cdot s}$ correspondente à variável não básica ($s \in L$) x_s que troca com x_t.

Os chamados métodos directos resolvem sistemas de equações lineares usando a decomposição LU [Golub e Loan, 1996, Júdice e Patrício, 1994]. Essa decomposição deve ter uma forma de modo a que a operação referida em 2. seja fácil de efectuar, isto é, que seja fácil de determinar a decomposição LU de

$$\overline{B} = [A_{\cdot j_1} \quad \ldots \quad A_{\cdot s} \quad \ldots \quad A_{\cdot j_m}]$$

a partir da decomposição LU da matriz

$$B = [A_{\cdot j_1} \quad \ldots \quad A_{\cdot t} \quad \ldots \quad A_{\cdot j_m}]$$

Por isso tem sido sugerido neste caso uma decomposição LU em que as matrizes L e U estejam separadas e L esteja na forma produto. Assim tem-se

$$L_k L_{k-1} \ldots\ L_2 L_1 = PUQ$$

com P e Q produtos de matrizes de permutação elementares

$$P_{ij} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 &&&&&&&& \\
& \cdots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 0 && 1 &&& \\
&&&& \cdots &&&& \\
&&& 1 && 0 &&& \\
&&&&&& 1 && \\
&&&&&&& \cdots & \\
&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha } i \\ \\ \leftarrow \text{linha } j \\ \\ \\ \\ \end{array},$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{col. } i & \text{col. } j \end{array}$$

U triangular superior e L_i uma matriz triangular inferior da forma

$$L_i = \left[\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& 1 &&&&& \\
&& \cdots &&&& \\
&&& 1 &&& \\
&&& \beta_{l+1} & 1 && \\
&&& \cdots && \cdots & \\
&&& \beta_m &&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha } l \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{coluna } l \end{array}$$

com β_i números reais.

A título de exemplo determinemos a decomposição LU da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Então

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} P_{12}$$

Se

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$L_1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} P_{12}$$

Considerando agora a matriz

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$L_2 L_1 B = U P_{12}$$

com

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Na implementação do método simplex (primal ou dual) há a necessidade de armazenar os elementos $\beta_j \neq 0$ de cada matriz L_i e os seus respectivos índices em três vectores e as matrizes de permutação P e Q em dois vectores de ordem m. Além disso, a matriz U é armazenada como esparsa num esquema de colecção de vectores [Júdice and Patrício, 1994], a não ser que a dimensão m do programa linear seja muito pequena.

Seguidamente iremos explicar como se resolvem os sistemas com as matrizes B e B^T necessários em cada iteração dos métodos primal e dual simplex usando esta forma de decomposição LU.

I. Resolução de um sistema $Bv = d$

Tem-se

$$Bv = d \Leftrightarrow L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 Bv = L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 d \Leftrightarrow PUQ = L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 d$$

Então obtém-se o seguinte processo:

1. Calcular $\overline{d} = L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 d = L_k(L_{k-1}(\dots (L_2(L_1 d))))$
2. Permutar as componentes de $\overline{d}$ usando $P \rightarrow \widetilde{d} = P^T \overline{d}$
3. Resolver $U\widetilde{v} = \widetilde{d}$
4. Permutar as componentes de $\widetilde{v}$ usando $Q \rightarrow v = Q^T \widetilde{v}$

Notar que se

$$L_i = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & \beta_{l+1} & 1 & \\ & & & \cdots & & \cdots & \\ & & & \beta_m & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha } l \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{coluna } l \end{array} & \end{array}$$

então a determinação de $L_i d$ requer no máximo $(m - l)$ multiplicações, pois

$$\overline{d} = L_i d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_l \\ d_{l+1} + \beta_{l+1} d_l \\ \dots \\ d_m + \beta_m d_l \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema $U\widetilde{v} = \widetilde{d}$ requer $(m+\gamma)$ operações, com γ o número de elementos não nulos não diagonais de U. É então fácil de concluir que um sistema $Bv = d$ se resolve com um número reduzido de operações e é por isso um processo muito rápido de efectuar.

II. Resolução de um sistema $B^T v = d$

Tem-se

$$B^T v = d \Leftrightarrow (L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 B)^T (L_1^T L_2^T \dots L_{k-1}^T L_k^T)^{-1} v = d \Leftrightarrow (PUQ)^T y = d$$

com y o vector

$$y = (L_1^T L_2^T \dots L_{k-1}^T L_k^T)^{-1} v$$

Mas então

$$B^T v = d \Leftrightarrow \begin{cases} Q^T U^T P^T y = d \\ v = L_1^T \left(L_2^T \dots \left(L_{k-1}^T \left(L_k^T y \right) \right) \right) \end{cases}$$

Assim obtém-se o seguinte processo para resolver $B^T v = d$:

1. Permutar as componentes de d usando $Q \to \overline{d} = Qd$
2. Resolver $U^T \overline{y} = \overline{d}$
3. Permutar as componentes de $\overline{y}$ usando $P \to y = P\overline{y}$
4. Calcular $v = L_1^T(L_2^T(\dots(L_{k-1}^T(L_k^T y))))$

É fácil de concluir que o processo de resolução do sistema $B^T v = d$ é semelhante ao do sistema $Bv = d$ e usa exactamente as mesmas matrizes.

III. Actualização da decomposição LU

Suponhamos que a matriz base numa dada iteração

$$B = [A_{\cdot j_1} \quad \dots \quad A_{\cdot t} \quad \dots \quad A_{\cdot j_m}]$$

tem decomposição

$$L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 B = P[U_{\cdot 1} \quad U_{\cdot 2} \quad \dots \quad U_{\cdot l} \quad \dots \quad U_{\cdot m}]Q$$

No fim dessa iteração a variável x_t troca com a variável não básica x_s e a matriz base é

$$\overline{B} = [A_{\cdot j_1} \quad \dots \quad A_{\cdot s} \quad \dots \quad A_{\cdot j_m}]$$

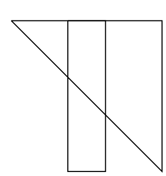
Portanto é necessário obter a decomposição LU dessa matriz. Para isso tem-se

$$L_k L_{k-1} \dots L_2 L_1 \overline{B} = P[U_{\cdot 1} \quad U_{\cdot 2} \quad \dots \quad \widetilde{U}_{\cdot l} \quad \dots \quad U_{\cdot m}]Q \tag{37}$$

É de notar que a matriz

$$\widetilde{U} = [U_{\cdot 1} \quad U_{\cdot 2} \quad \dots \quad \widetilde{U}_{\cdot l} \quad \dots \quad U_{\cdot m}]$$

não é em geral triangular superior, devido à existência da nova coluna $\widetilde{U}_{\cdot l}$, que se obtém de $A_{\cdot s}$ usando as matrizes L_i, P e Q. Essa matriz terá a estrutura seguinte



$\uparrow$
Coluna l

Para tornar essa matriz triangular usamos o processo habitual, ou seja, existem p matrizes L_i tais que

$$L_{k+p} \dots L_{k+1} \widetilde{U} = \widetilde{P} \overline{U} \widetilde{Q} \tag{38}$$

com $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ matrizes de permutação e $\overline{U}$ uma matriz triangular superior.

Como P e Q são matrizes de permutação, então de (38) vem

$$L_{k+p} \dots L_{k+1} (P\widetilde{U}Q) = P\widetilde{P}\overline{U}\widetilde{Q}Q$$

Donde

$$(L_{k+p} \dots L_{k+1})(L_k \dots L_1 \overline{B}) = (P\widetilde{P})\overline{U}(\widetilde{Q}Q)$$

Como o produto de matrizes de permutação é uma matriz de permutação, então obtém-se a forma pretendida

$$L_{k+p} \dots L_{k+1} L_k \dots L_1 \overline{B} = \overline{P}\ \overline{U}\ \overline{Q}$$

com $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ matrizes de permutação e $\overline{U}$ triangular superior.

Mostrámos assim que é possível actualizar a decomposição LU da matriz base usando apenas matrizes de permutação e $p \leq m - l$ matrizes L_i adicionais. Para ilustração da actualização da decomposição de uma matriz base, consideremos novamente a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

cuja decomposição LU tem a forma

$$L_2 L_1 B = P_{12} U$$

com

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -2 & & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e U é a matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que pretendemos actualizar a decomposição LU da matriz

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

que se obtém da anterior por troca da coluna 2 de B pela coluna $[1\ -2\ 0]^T$. De acordo com o processo explicado nesta secção, tem-se

$$L_2 L_1 \overline{B} = P_{12} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ & \beta & -1 \\ & \gamma & 2 \end{bmatrix}$$

onde α, β e γ são números reais a determinar. Da definição da matriz $\overline{B}$ facilmente se conclui que esses valores satisfazem a seguinte equação

$$L_2 L_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = P_{12} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Mas

$$L_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 L_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = L_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = P_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$L_2 L_1 \overline{B} = P_{12} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & 1 & -1 \\ & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Para obter a decomposição LU de $\overline{B}$ é suficiente anular o elemento $\overline{b}_{32}$, o que se pode fazer usando uma nova matriz L_i. Então tem-se

$$L_3 L_2 L_1 \overline{B} = P_{12} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & 1 & -1 \\ & & 6 \end{bmatrix}$$

com

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

e a decomposição LU de $\overline{B}$ foi obtida. Notar que as matrizes L_i, $i = 1, 2, 3$, podem ser armazenadas em três vectores *VAL*, *INDL* e *INDC*, representando os valores $\beta_i \neq 0$ e as respectivas linhas e colunas das matrizes L_i. Assim as três matrizes L_i, $i = 1, 2, 3$, podem ser armazenadas usando os vectores:

$$VAL = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad INDL = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad INDC = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para representar convenientemente essas matrizes seria ainda necessário um vector de PNT para indicar o início e o fim de cada matriz nesse esquema de armazenagem. No exemplo presente tem-se

$$PNT = [1\ 2\ \ 3\ 4]^T$$

Notar que $PNT(i+1) - PNT(i)$ representa o número de elementos β_j da matriz L_i.

Como segundo exemplo de ilustração, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \\ \text{Sujeito a} & \quad x_1 + x_2 + x_3 + \ \ x_4 \leq 1 \\ & \ 2x_1 - x_2 + x_3 \qquad\quad \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Introduzindo as variáveis de desvio x_5, x_6 e x_7 obtém-se a forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \\ \text{Sujeito a} & \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad\qquad = 1 \\ & \ 2x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 = 2 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 7 \end{array}$$

Uma solução básica admissível inicial tem associada o conjunto $J = \{5, 6, 7\}$. As variáveis não básicas são nulas e as básicas são dadas por $x_5 = 1$, $x_6 = 3$ e $x_7 = 2$. Além disso a matriz base B associada a essa solução é

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e na sua decomposição LU as matrizes L_i não existem e U é a matriz identidade. Esta solução básica admissível pode ser a solução inicial para a aplicação do método simplex. Então

$$B^T\pi = c_J \Rightarrow \pi = 0$$

e $\bar{c}_i = c_i$, para todo $i \notin J$. Portanto $s = 1$. Para calcular o valor que a variável não básica x_1 vai tomar, calcula-se

$$B\overline{A}_{.1} = A_{.1} \Rightarrow \overline{A}_{.1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e tem-se

$$\theta = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} : \bar{a}_{i1} > 0\right\} = 1$$

Então $r = 1$ e x_5 é a variável básica a trocar com x_1 ($t = 5$). Donde J é actualizado para $J = \{1, 6, 7\}$ e a matriz base associada é

$$B^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A decomposição LU da nova matriz base é actualizada usando apenas matrizes de permutação. Com efeito tem-se

$$\overline{B} = P_{13}UP_{13}$$

com

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na prática, a matriz A da forma normal de um programa linear é muito esparsa e o mesmo acontece às matrizes base em cada iteração. Essa característica e o uso de permutações de linhas e de colunas obedecendo a critérios de redução de enchimentos, tais como o Critério de Markowitz [Júdice and Patrício, 1994], torna o número p de matrizes L_i a adicionar bastante pequeno. Assim a actualização da decomposição LU da matriz base é também um processo muito rápido de efectuar. Essa propriedade conjuntamente com as caracterizações simples de admissibilidade primal e dual tornam os métodos primal e dual simplex bastante eficientes para a resolução de programas lineares de pequenas e grandes dimensões. Quando o número de matrizes L_i é bastante elevado, é normal que as matrizes U associadas à decomposição se tornem menos esparsas do que deveriam ser se a decomposição LU fosse efectuada sem actualização, mas a partir da matriz base directamente. Por isso os códigos de programação linear efectuam esse tipo de decomposição directa do fim de um determinado ciclo de iterações, reduzindo assim as matrizes L_i e tornando mais esparsa a matriz triangular da decomposição. Esse processo é denominado *Reinversão*.

17 Quadro Simplex

Consideremos um programa linear na forma normal simples

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^Tx \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, com característica $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c, x \in \mathbb{R}^n$. Seja $\overline{x}$ uma solução básica admissível associada a um conjunto $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $|J| = m$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é não singular. Então, como vimos anteriormente, podemos escrever as variáveis básicas como função das variáveis não básicas

$$x_J = B^{-1}b - \sum_{j \in L} x_j \left(B^{-1} A_{\cdot j} \right) \tag{39}$$

Além disso o valor da função objectivo em $\overline{x}$ é dado por

$$z = c_J^T B^{-1} b + \sum_{j \in L} \overline{c}_j x_j$$

com

$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j} \tag{40}$$

e $L = \{1, 2, \dots, n\} - J$. Se introduzirmos os vectores $\overline{b}$, $\overline{A}_{\cdot j}$, $j \in J$ e o número real $\overline{z}$ através de

$$\begin{aligned} B\overline{b} &= b \\ B\overline{A}_{\cdot j} &= A_{\cdot j}, \quad j \in L \\ \overline{z} &= c_J^T \overline{b} = b^T \pi \end{aligned} \tag{41}$$

então podemos escrever

$$\begin{aligned} x_J + \sum_{j \in L} x_j \overline{A}_{\cdot j} &= \overline{b} \\ -z + \sum_{j \in L} \overline{c}_j x_j &= -\overline{z} \end{aligned} \tag{42}$$

O *Quadro Simplex* serve exactamente para guardar essa informação associada à solução básica admissível. Assim, se considerarmos, por simplicidade, que $J = \{1, 2, \dots, m\}$, então as fórmulas (42) podem ser apresentadas no seguinte quadro:

	x_1	$\dots$	x_r	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_s	$\dots$	x_n	
x_1	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$\overline{a}_{1,m+1}$	$\dots$	$\overline{a}_{1s}$	$\dots$	$\overline{a}_{1n}$	$\overline{b}_1$
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$
x_r	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$\overline{a}_{r,m+1}$	$\dots$	$\overline{a}_{rs}$	$\dots$	$\overline{a}_{rn}$	$\overline{b}_r$
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$
x_m	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$\overline{a}_{m,m+1}$	$\dots$	$\overline{a}_{ms}$	$\dots$	$\overline{a}_{mn}$	$\overline{b}_m$
$-z$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\overline{c}_{m+1}$	$\dots$	$\overline{c}_s$	$\dots$	$\overline{c}_n$	$-\overline{z}$

Notar que à esquerda do quadro escrevemos as variáveis básicas e a variável $-z$ correspondente à função objectivo. Como as variáveis não básicas são nulas, então as variáveis básicas da solução básica admissível satisfazem $x_i = \overline{b}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ e o valor da função objectivo correspondente a essa solução é $\overline{z}$.

Consideremos agora que numa iteração do método simplex a solução básica admissível dada se vai transformar numa outra solução básica admissível por troca da variável não básica x_s pela variável básica x_r. Dada a definição do quadro de simplex, a coluna da variável x_s deve ser transformada em

$$e^r = (0 \ \dots \ 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linha } r}}{1} \ 0 \ \dots \ 0)^T$$

Para que isso seja possível, é evidente que $\overline{a}_{rs} \neq 0$. Esse elemento é denominado *Pivot da Transformação*, que é chamada *Operação Pivotal* e que vai permitir obter o quadro associado à nova solução básica. Essa operação pivotal consiste em:

1. Escrever x_s como combinação linear da variável x_r e das restantes variáveis não básicas a partir da equação r.

2. Substituir nas restantes equações x_s pela sua expressão.

O quadro associado à nova solução básica admissível tem então a forma

	x_1	$\ldots$	x_r	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_s	$\ldots$	x_n	
x_1	1	$\ldots$	$\overline{a}_{1r}$	$\ldots$	0	$\overline{a}_{1,m+1}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\overline{a}_{1n}$	$\overline{b}_1$
$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$
x_s	0	$\ldots$	$\overline{a}_{rr}$	$\ldots$	0	$\overline{a}_{r,m+1}$	$\ldots$	1	$\ldots$	$\overline{a}_{rn}$	$\overline{b}_r$
$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$
x_m	0	$\ldots$	$\overline{a}_{mr}$	$\ldots$	1	$\overline{a}_{m,m+1}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\overline{a}_{mn}$	$\overline{b}_m$
$-z$	0	$\ldots$	$\overline{c}_r$	$\ldots$	0	$\overline{c}_{m+1}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$\overline{c}_n$	$-\overline{z}$

onde os elementos $\overline{a}_{ij}$, $\overline{b}_i$, $\overline{c}_j$, e $\overline{z}$ são obtidos do quadro anterior de acordo com as regras de eliminação de Gauss-Jordan, isto é, através de operações elementares. Em particular os elementos $\overline{b}_i$, $\overline{c}_j$ e $\overline{z}$ são transformados por

$$\begin{gathered}\overline{b}_r = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} = \theta \\ \overline{b}_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{is}\theta, \quad i \neq r \\ \overline{z} = \overline{z} + \overline{c}_s\theta\end{gathered} \tag{43}$$

e

$$\begin{gathered}\overline{c}_r = \frac{\overline{c}_s}{-\overline{a}_{rs}} = \eta \\ \overline{c}_j = \overline{c}_j + \eta\overline{a}_{rj}, \quad j \in L - \{s\} \\ \overline{z} = \overline{z} - \overline{b}_r\eta\end{gathered} \tag{44}$$

Notar que os elementos $\overline{b}_i$, $\overline{c}_j$ e $\overline{z}$ se transformam exactamente da mesma forma explicada nas descrições dos métodos primal e dual simplex.

A título de exemplo, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ & 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Então a solução básica associada a $J = \{3,4\}$ é admissível e é representada pelo seguinte quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	1	1	0	1
x_4	2	-1	0	1	2
$-z$	1	-1	0	0	0

Como $\overline{c}_2 = -1 < 0$, o método simplex escolhe a variável não básica x_2 para passar a básica. Os elementos $\overline{a}_{i2}$ aparecem na coluna da variável x_2, pelo que

$$\theta = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i2}} : \ \overline{a}_{i2} > 0\right\} = \frac{1}{1} = 1$$

e a variável x_3 deve trocar com x_2. Para construir o quadro associado à nova solução básica admissível, a coluna da variável x_2 deve passar a ser $e^1 = (1 \ \ 0 \ \ 0)^T$. Para isso, basta adicionar as linhas 2 e 3 do quadro à primeira e obter o seguinte quadro:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	1	1	0	1
x_4	3	0	1	1	3
$-z$	2	0	1	0	1

A nova solução básica admissível tem por variáveis básicas x_2 e x_4 com valores 1 e 3 respectivamente e variáveis não básicas $x_3 = x_4 = 0$. Além disso o valor da função objectivo para essa solução é -1. Como $\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L = \{1, 3\}$, então a solução básica admissível é óptima e o método simplex termina com essa solução.

A descrição apresentada nesta secção indica que a utilização de quadros para representar soluções básicas admissíveis é muito simples. No entanto as transformações dos quadros são feitas de acordo com a eliminação de Gauss-Jordan (ou operações elementares). Além de exigir operações desnecessárias com colunas de variáveis não básicas não utilizadas na passagem de uma solução básica para outra, o processo é considerado instável e por isso muito sensível a erros de arredondamento. Por isso os quadros simplex para a representação de soluções básicas não são usados na prática na resolução de programas lineares.

18 Unicidade das Soluções Óptimas do Primal e do Dual

Consideremos o programa linear primal na forma normal simples

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

e o seu dual

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & b^T u \\ \text{Sujeito a} & A^T u + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, com característica $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c, x, s \in \mathbb{R}^n$. Em relação à unicidade da solução óptima do dual (D), verifica-se o seguinte resultado

Teorema 16 *Se o primal (P) tem uma solução óptima básica não degenerada $\overline{x}$, então o dual (D) tem uma solução óptima única π, que é a única solução do sistema de equações lineares $B^T \pi = c_J$, onde $B = [A_{.j}]_{j \in J}$ é a matriz base associada à solução básica $\overline{x}$.*

Demonstração. Seja $\overline{x}$ a solução óptima básica não degenerada de (P). Então existe um e um só $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, com $|J| = m$ e $B = [A_{.j}]_{j \in J}$ não singular tal que

$$B\overline{x}_J = b, \quad \overline{x}_J > 0$$

Pelo teorema fundamental da dualidade linear, o dual (D) tem pelo menos uma solução óptima π satisfazendo $B^T \pi = c_J$. Para provar que π é a única solução óptima de (D), seja u uma outra solução óptima de (D). Como $\overline{x}_J > 0$, então pelo teorema da complementaridade das variáveis de folga tem-se $s_J = 0$ e portanto

$$B^T u = c_J$$

Donde $B^T(\pi - u) = 0$ e, como B é não singular, $u = \pi$. □

O próximo teorema estabelece um resultado semelhante para o primal.

Teorema 17 *Uma solução óptima básica $\overline{x}$ não degenerada do primal (P) é única se e só se a solução óptima π do dual (D) é não degenerada, isto é, satisfaz*

$$c_j - \pi^T A_{.j} > 0 \text{ para todo } j \notin J \tag{45}$$

onde J é o conjunto único associado à solução básica $\overline{x}$.

Demonstração. Se $\overline{x}$ é uma solução óptima básica de (P), então, pelo teorema anterior, o dual (D) tem uma solução óptima única π satisfazendo $B^T\pi = c_J$, com $B = [A_{\cdot j}]_{j\in J}$ a matriz base associada à solução básica $\overline{x}$.

Se π é não degenerada e se $\widetilde{x}$ é uma outra solução óptima de (P), então, de (45) e do teorema da complementaridade das variáveis de folga, tem-se $\widetilde{x}_j = 0$ para todo $j \notin J$. Portanto $B\widetilde{x}_J = b$ e

$$B(\widetilde{x}_J - \overline{x}_J) = b - b = 0$$

Como B é não singular, então $\widetilde{x}_J = \overline{x}_J$ e $\widetilde{x} = \overline{x}$.

Suponhamos agora que π é degenerada, isto é, que existe $s \notin J$ tal que $c_s - \pi^T A_{\cdot s} = 0$. Sejam

$$B\overline{A}_{\cdot s} = A_{\cdot s}$$

e

$$\theta = \begin{cases} +\infty \text{ se } \overline{a}_{is} \leq 0 \text{ para todo } i = 1, 2, ..., m \\ \min\left\{ \dfrac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} : \ \overline{a}_{is} > 0 \right\} \end{cases}$$

Então qualquer valor de x_s no intervalo $]0, \theta]$ fornece uma outra solução óptima de (P). Com efeito as soluções

$$\begin{array}{c} 0 \leq x_s \leq \theta \\ x_J = \overline{b} - x_s\overline{A}_{\cdot s} \geq 0 \\ x_j = 0, \quad j \notin J \cup \{s\} \end{array}$$

são admissíveis e satisfazem

$$c^T x = \overline{z} + \overline{c}_s x_s = \overline{z}$$

com $\overline{z}$ o valor óptimo associado à solução básica $\overline{x}$. Então $\overline{x}$ não é a única solução óptima do primal (P). □

Como ilustração destes dois teoremas, consideremos o programa linear

$$(\text{P}) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Como o programa só tem duas variáveis, então pode ser resolvido graficamente e $\overline{x} = (0, 0)$ é uma sua solução óptima. A forma normal desse programa é

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Como $\overline{x}_1 = 0$, $\overline{x}_2 = 0$, então $\overline{x}_3 = 2$, $\overline{x}_4 = 1$. Donde $J = \{3, 4\}$ e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é não singular. Assim $\overline{x} = (0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 1)^T$ é uma solução óptima básica admissível de (P). Como $\overline{x}_J > 0$, então essa solução é não degenerada. Pelo teorema 16, a solução óptima π do dual de (P) é única e satisfaz

$$B^T\pi = c_J$$

Ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde $\pi = (0 \ \ 0)^T$ é a única solução óptima do dual de (P). Por outro lado essa solução é dual não degenerada, pois

$$c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 2 > 0$$

$$c_2 - \pi^T A_{\cdot 2} = 3 > 0$$

Então, pelo teorema 17, $\overline{x}$ é a única solução óptima do programa (P).

Como segundo exemplo de ilustração dos teoremas anteriores, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Tal como no exemplo anterior, $\overline{x} = (0 \ \ 0)^T$ é uma solução óptima deste programa e corresponde a uma solução básica admissível da forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Com efeito $\overline{x} = (0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 1)^T$, $J = \{3, 4\}$ e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso a solução básica é não degenerada, pois $\overline{x}_J > 0$. Portanto a solução óptima do dual é única e satisfaz

$$B^T \pi = c_J$$

ou seja, $\pi = 0$. Para verificar se $\overline{x}$ é a única solução óptima do programa, calculemos os coeficientes de custo reduzidos

$$\bar{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 2$$

$$\bar{c}_2 = c_2 - \pi^T A_{\cdot 2} = 0$$

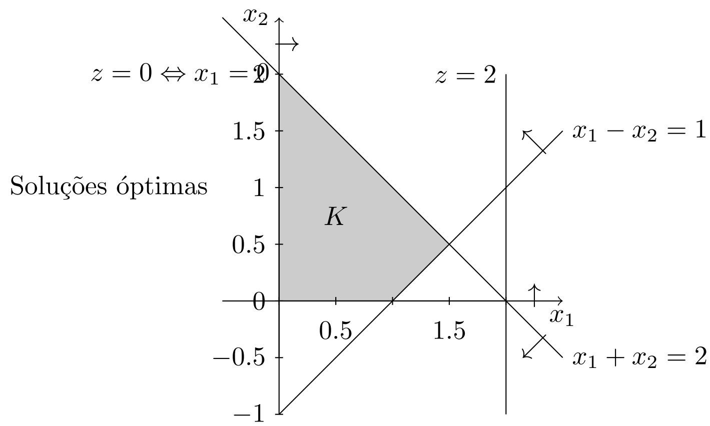
Então π é uma solução dual degenerada e pelo teorema 17, $\overline{x}$ não é a única solução do programa primal. Para determinar a expressão geral das soluções óptimas desse programa, usa-se o processo apresentado na demonstração do teorema 17. Assim calcula-se

$$B\overline{A}_{\cdot 2} = A_{\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{12} = 1 \\ \bar{a}_{22} = -1 \end{cases}$$

Donde $\theta = \frac{2}{1} = 2$ e

$$x_1 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 2, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

fornece todas as soluções óptimas do programa dado.



A análise da unicidade das soluções óptimas do primal e do dual pressupõe que a solução óptima do primal é não degenerada. Esse estudo é mais complexo no caso de soluções degeneradas. As seguintes propriedades são consequências simples do dois teoremas anteriores:

1. Se a solução óptima do dual não é única, então toda a solução básica óptima do primal tem de ser degenerada.

2. Se a solução óptima do primal é degenerada, então pode ser única e existir um conjunto $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ para o qual
$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{.j} = 0$$
para certo $j \notin J$, com π a solução dual dada por $B^T \pi = c_J$.

3. Se $\overline{x}$ é uma solução óptima básica degenerada do primal associada a um conjunto $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que a correspondente solução dual π é não degenerada, então $\overline{x}$ é a única solução óptima do primal.

O exemplo a seguir apresentado ilustra a propriedade 2. Consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Resolvendo graficamente este programa, facilmente se conclui que $\overline{x} = (0 \quad 0)^T$ é a sua única solução óptima. Consideremos agora a forma normal desse programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Então $\overline{x} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ é degenerada e há mais do que uma solução básica admissível a si associada. Se considerarmos $J = \{3, 4\}$, então $\pi = 0$ e $\overline{c}_1 = 0$, o que confirma a conclusão 2.

Este exemplo também mostra que o primal pode ter uma solução óptima única e o seu dual ter mais do que uma solução óptima. Com efeito, se considerarmos a solução básica $\overline{x} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ associada a $J = \{2, 3\}$, então tem-se
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B^T\pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Além disso

$$\overline{c}_1 = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\overline{c}_4 = 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

e portanto π é uma solução óptima do dual. Então o dual do programa linear tem pelo menos as soluções óptimas $\pi^1 = 0$ e $\pi^2 = [0 \;\; -1]^T$. Este exemplo também ilustra a propriedade 3. Com efeito para $J = \{2, 3\}$ a correspondente solução dual óptima é não degenerada e por isso a solução óptima do primal é única, apesar de ser degenerada.

Como conclusão final da análise apresentada nesta secção, podemos afirmar que se $\overline{x}$ é uma solução óptima básica não degenerada do primal então é única se e só se a correspondente solução óptima π do dual é não degenerada. Se $\overline{x}$ é degenerada, então a existência de um conjunto J para o qual a solução óptima do dual π é não degenerada assegura a unicidade da solução óptima $\overline{x}$.

19 Interpretação das Variáveis Duais como Preços Marginais

Consideremos novamente o programa linear primal na forma normal simples

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, com característica $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c, x \in \mathbb{R}^n$. O seu dual tem a forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & b^T u \\ \text{Sujeito a} & A^T u \leq c \end{array}$$

Seja $\overline{x}$ uma solução óptima básica admissível não degenerada e π a solução óptima única do dual. Então, como vimos anteriormente, existe um conjunto $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, com $|J| = m$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ não singular tal que

$$x_J = \overline{b}$$

$$x_j = 0, \quad j \notin J$$

$$B\overline{b} = b$$

$$B^T\pi = c_J$$

$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j} \geq 0, \quad j \notin J$$

Consideremos agora o programa linear $PL(b_i + \varepsilon)$ obtido do primal por modificação do termo independente b_i para $b_i + \varepsilon$ e seja

$$\widetilde{b} = b + \varepsilon e^i = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_i + \varepsilon, b_{i+1}, \ldots, b_m)^T$$

$$x_J = \widetilde{b}, \quad x_j = 0, \; j \notin J$$

onde

$$B\widetilde{b} = b + \varepsilon e^i$$

Portanto

$$\widetilde{b} = \overline{b} + \varepsilon B^{-1} e^i$$

Como a solução básica admissível é não degenerada, então $\overline{b} > 0$ e portanto $\widetilde{b} \geq 0$ para ε suficientemente pequeno. Donde a solução

$$x_J = \widetilde{b}, \quad x_j = 0, \; j \notin J$$

é uma solução básica admissível para o programa linear transformado. O vector π continua a ser dual admissível para o programa $PL(b_i + \varepsilon)$, pois não houve alteração nos coeficientes de custo do novo programa. Além disso, se $z_i(b_i)$ é o valor óptimo do programa original e $z_i(b_i + \varepsilon)$ é o valor óptimo do novo programa $PL(b_i + \varepsilon)$, então tem-se

$$z(b_i + \varepsilon) = (b_i + \varepsilon)\pi_i + \sum_{j \neq i} b_j \pi_j$$

ou seja

$$z(b_i + \varepsilon) = z(b_i) + \varepsilon \pi_i$$

Portanto

$$\frac{z\left(b_i + \varepsilon\right) - z\left(b_i\right)}{\varepsilon} = \pi_i \tag{46}$$

e a variável dual π_i óptima representa a taxa de variação do valor óptimo quando b_i é alterado por um valor suficientemente pequeno de forma a que a solução básica óptima do programa original se mantenha admissível para o novo programa linear. Em linguagem económica-financeira, π_i representa o preço sombra ou o preço marginal e tem-se

$\pi_i > 0 \Rightarrow z(b_i)$ aumenta com o acréscimo de b_i.

$\pi_i < 0 \Rightarrow z(b_i)$ diminui com o acréscimo de b_i.

$\pi_i = 0 \Rightarrow z(b_i)$ mantém-se inalterado com o acréscimo de b_i.

Além disso é possível provar que

$$z(b_i + \varepsilon) \geq z(b_i) + \pi_i \varepsilon \tag{47}$$

para todo o número real ε. Esta desigualdade é consequência do facto da função $z(b_i)$ ser convexa por troços, das propriedades deste tipo de funções e da interpretação da variável dual como uma derivada parcial da função $z(b_i)$ em ordem a b_i [Murty, 1995].

A título de exemplo, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & \;\; x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

O seu dual tem a forma

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w = & 4u_1 + 3u_2 \\ \text{Sujeito a} & \;\; u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ & \;\; u_1 - 2u_2 \leq 3 \\ & 3u_1 + \;\; u_2 \leq 3 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Esse programa pode ser resolvido graficamente e a sua solução óptima é $\pi = (4/5\ 3/5)^T$. Para determinar a solução óptima do primal usa-se o teorema da complementaridade das variáveis de folga e obtém-se as seguintes implicações:

$$\begin{array}{c} u_1 = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ u_2 = 3/5 \Rightarrow 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ u_1 - 2u_2 < 3 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array} \tag{48}$$

Então $x_2 = 0$ na solução óptima e os valores das restantes variáveis constituem a solução do seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{array}{c} x_1 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{array}$$

Donde $x_1 = 1$, $x_3 = 1$ e portanto $\overline{x} = (1\ 0\ 1)^T$ é uma solução óptima do primal e o valor óptimo é $\overline{z} = 5$.

Suponhamos agora que $b_2 = 3$ é alterado para 4. Então houve um acréscimo no valor de b_2. Como $\pi_2 > 0$, o valor óptimo $z(3) = \overline{z}$ do programa dado irá aumentar para $z(4)$, que segundo a fórmula (47) terá de satisfazer

$$z(4) \geq 5 + 3/5$$

Neste caso é fácil de determinar a solução óptima do primal resolvendo um sistema de equações lineares com duas variáveis. Com efeito, como a solução dual não é alterada, as implicações (48) são verdadeiras com $b_2 = 4$ em vez de 3 e portanto tem-se

$$\begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \end{array}$$

Donde

$$\widetilde{x} = (8/5\ 0\ 4/5)^T, \quad \overline{z}(4) = 28/5$$

Portanto a desigualdade (47) é satisfeita como igualdade neste caso.

Como segundo exemplo, consideremos o mesmo programa linear do exemplo anterior. Como vimos anteriormente, a solução óptima do dual desse programa é $u = (4/5\ 3/5)^T$ e o valor óptimo é $\overline{z} = 5$. Se agora alterarmos o valor de b_2 de 3 para 0, então $\varepsilon = -3$. O programa primal passa então a ser

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

O dual correspondente é

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & 4u_1 \\ \text{Sujeito a} & u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ & u_1 - 2u_2 \leq 3 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 3 \\ & u_i \geq 0, \quad i = 1,2 \end{array}$$

que tem por solução óptima $\pi = (1, 0)$. A determinação da solução óptima do programa pode ser feita novamente usando o teorema da complementaridade das variáveis de folga, obtendo-se

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{3} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

Donde $\overline{x} = (0\ \ 0\ \ 4/3)^T$ é a solução óptima do primal e o valor óptimo é

$$z(0) = 3.$$

Note-se que

$$\frac{z(0)-z(3)}{-3} = \frac{4-5}{-3} = \frac{1}{3} < u_2 = \frac{3}{5}.$$

Na prática, a determinação da nova solução básica óptima é feita usando o método dual simplex. Com efeito, considere-se o PL original na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad - x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

A solução óptima deste programa é $x = (1,0,1,0,0)$, pelo que $J = \{1,3\}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B^T\pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\overline{c}_2 = 3 - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{8}{5} > 0$$

$$\overline{c}_4 = 0 - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{5} > 0$$

$$\overline{c}_5 = 0 - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} > 0$$

Consideremos o novo programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad - x_5 = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

Seja $J = \{1,3\}$ a solução básica óptima do PL anterior. Então

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B\overline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

donde a solução básica é não admissível. Contudo, como a solução dual (solução de $B^T\pi = c_J$) e os coeficientes de custo reduzidos são os mesmos, então a solução básica é dual admissível, pelo que o método dual simplex pode ser usado. Note-se que o valor óptimo vai diminuir, uma vez que $u_2 = \frac{3}{5} > 0$ e b_2 decresce de valor.

20 Interpretação Económica do Dual

I. PRIMEIRA INTERPRETAÇÃO

Consideremos que uma determinada empresa produz m produtos, $1, \ldots, m$, e que b_i representa a quantidade do produto i requerida, para $i = 1, \ldots, m$. Para produzir cada um desses produtos, a empresa realiza n actividades (ou operações), $j = 1, \ldots, n$, com diferentes níveis de actividades x_j, onde

$x_j = 0$, se não se realiza essa actividade,

$x_j > 0$, se essa actividade é realizada com nível x_j.

Seja c_j o custo unitário da operação j, $j = 1, \ldots, n$. O custo de produção é

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Para cada produto i, denotemos por a_{ij} a quantidade de produto i produzida numa unidade da actividade j. Como a produção do produto i é dada por

$$\sum_{j=1}^{n} \text{nível}_j \times \text{quantidade}_{ij},$$

podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

A produção tem que satisfazer a procura b_i, dando lugar ao seguinte *Modelo de Produção*:

$$\begin{array}{lll} \text{(Primal)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq c_j, \ i = 1, \ldots, m \\ & & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Por outro lado, a empresa necessita de vender os produtos que fabrica. Para isso tem que estipular preços (unitários) $u_i \geq 0$ a cada produto $i = 1, 2, \ldots, m$. Assim, se a empresa produz a quantidade b_i do produto i, então recebe pela sua venda $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i u_i$. Por outro lado, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$ é o preço unitário da actividade j, e deve ser superior ao custo unitário c_j. Portanto, a empresa também deve resolver o problema

$$\begin{array}{lll} \text{(Dual)} & \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \\ & \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \\ & & u_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

De acordo com a dualidade linear, nestes programas lineares pretende-se

- determinar níveis de produção x_j de cada actividade j, $j = 1, 2, \ldots, n$,
- fixar preços u_i a cada produto, $i = 1, 2, \ldots, m$,

de modo a que se obtenha uma produção tal que o mínimo custo coincida com o melhor preço.

A interpretação económica da propriedade da complementaridade das variáveis de folga é apresentada a seguir.

- Se há produção na actividade j, então o preço é igual ao custo da actividade, ou seja,

$$x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j.$$

O recíproco é também verdadeiro, isto é, se o custo de uma actividade é excessivo, então esta não se deve realizar, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i < c_j \Rightarrow x_j = 0.$$

- Se a produção do produto i é superior à procura b_i, então o preço do produto i deve ser nulo, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i \Rightarrow u_i = 0$$

O recíproco é também verdadeiro, isto é, se um determinado produto estiver associado a um preço positivo, então não deve ser produzido em excesso, ou seja,

$$u_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i.$$

II. SEGUNDA INTERPRETAÇÃO

Consideremos agora que uma empresa produz m produtos com m tipos de materiais diferentes, de modo a ter um determinado lucro e a satisfazer a oferta. Sejam:

- $x_j \equiv$ número de unidades do produto j fabricadas durante um período de tempo, $j = 1, 2, \ldots, n$,
- $b_i \equiv$ quantidade do material i disponível para fabricar os vários produtos, $i = 1, 2, \ldots, m$,
- $c_j \equiv$ preço unitário de venda do produto j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Então, a empresa pretende resolver o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{Sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Para entender o problema dual, notamos que a empresa necessita de adquirir quantidades b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, de cada material i para poder fabricar os m produtos. Seja então:

- $u_i \equiv$ preço unitário que a empresa paga se adquirir o material i (preço sombra do material i).

Então irá procurar

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{m} b_i u_i,$$

onde $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Além disso, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i$ representa o preço sombra do material i usado no fabrico do produto j. Esse valor deve ser maior ou igual do que o lucro c_j, para que a venda seja honesta, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geq c_j,\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Assim, a empresa tem também que resolver o seguinte problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \\ \text{Sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \\ & u_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

Na solução óptima a empresa determina

- a quantidade de produto x_j,
- os preços unitários de aquisição de material i,

de modo a haver uma produção total tal que a venda dos produtos coincida com o custo de aquisição dos materiais, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i.$$

A interpretação económica da propriedade da complementaridade das variáveis de folga é apresentada a seguir.

- Se o produto j é fabricado, então o lucro da sua venda deve ser igual ao preço sombra da aquisição do material usado no seu fabrico, isto é,

  $$x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j.$$

  Além disso

  $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i > c_j \Rightarrow x_j = 0,$$

  o que significa que não se deve fabricar o produto j se o preço de aquisição do material para o fazer for excessivo.

- Se algum material i for adquirido em excesso, então o preço sombra correspondente deve ser nulo, isto é,

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow u_i = 0.$$

  De outro modo, a empresa pode adquirir menos material e reduzir os seus encargos. Nesse caso,

  $$u_i > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

  isto é, se o preço sombra é positivo, então todo o material adquirido deve ser usado no fabrico dos vários produtos.

21 Métodos Simplex para Programas Lineares com Limites Inferiores e Superiores

Nesta secção iremos discutir as extensões dos métodos primal e dual simplex à resolução de programas lineares com limites inferiores e superiores nas variáveis, isto é, a programas de forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{49}$$

onde $-\infty \leq l_j < u_j \leq +\infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, A é uma matriz de ordem $m \times n$ com característica $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$.

Como referimos anteriormente, numa solução básica desta forma normal, as variáveis não básicas tomam um dos limites inferior ou superior. Assim numa solução básica $\overline{x}$ para a forma normal há a considerar uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em três conjuntos

$$L = \{i : \overline{x}_i = l_i\}, \quad U = \{i : \overline{x}_i = u_i\} \tag{50}$$

e J, onde $|J| = m$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é não singular. As variáveis não básicas x_i da solução básica satisfazem

$$\overline{x}_i = l_i, \ i \in L \quad \text{e} \quad \overline{x}_i = u_i, \ i \in U \tag{51}$$

enquanto que as m variáveis básicas constituem a solução única $x_J = \overline{b}$ do sistema de equações lineares

$$B\overline{b} = b - \sum_{j \in L} l_j A_{\cdot j} - \sum_{j \in U} u_j A_{\cdot j} \tag{52}$$

Como as variáveis não básicas tomam valores iguais a um dos limites, então a solução básica $\overline{x}$ é admissível se e só se

$$l_i \leq \overline{x}_i \leq u_i \text{ para todo } i \in J \tag{53}$$

Como exemplo de ilustração do conceito de solução básica, consideremos o programa linear na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_5 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad - x_5 = 2 \\ & -1 \leq x_1 \leq 3, \quad -1 \leq x_2 \leq 3, \quad x_4 \leq 4, \quad x_5 \geq 0 \end{array} \tag{54}$$

Então os limites inferiores l_i e superiores u_i de cada uma das variáveis x_i são dados por:

$$l_1 = -1, \quad l_2 = -1, \quad l_3 = -\infty, \quad l_4 = -\infty, \quad l_5 = 0$$

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = +\infty, \quad u_4 = 4, \quad u_5 = +\infty$$

Se pretendermos determinar a solução básica associada à partição

$$J = \{1, 3\}, \quad L = \{2, 5\}, \quad U = \{4\}$$

então tem-se

$$J = \{1, 3\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é não singular}$$

e portanto a solução dada pela partição é básica. As variáveis não básicas satisfazem (51) e portanto tem-se

$$\overline{x}_2 = -1, \quad \overline{x}_5 = 0, \quad \overline{x}_4 = 4$$

Os valores das variáveis básicas são calculados a partir da fórmula (52). Para isso determina-se primeiro o vector

$$g = b - \sum_{j \in L} l_j A_{\cdot j} - \sum_{j \in U} u_j A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e depois resolve-se o sistema

$$B\overline{b} = g \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

As variáveis básicas são então dadas por $x_J = \overline{b}$, ou seja,

$$\overline{x}_1 = -5, \quad \overline{x}_3 = 3$$

Notar que essa solução básica não é admissível, pois $\overline{x}_1 < l_1 = -1$. No entanto, a solução será admissível para o programa linear que se obtém do programa dado por substituição do limite inferior l_1 de -1 para -6.

Como referimos anteriormente, os métodos primal e dual simplex são processos que operam com soluções básicas primal e dual admissíveis respectivamente mantendo sempre a complementaridade como verdadeira. Para estudarmos a extensão desses algoritmos à forma normal com limites inferiores e superiores, é necessário encontrar uma condição que estabeleça se uma solução básica é dual admissível ou não. Para isso, consideremos o programa linear na seguinte forma equivalente

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & -x_j \geq -u_j, \quad j \in L_0 \\ & x_j \geq l_j, \quad j \in U_0 \end{array}$$

onde

$$L_0 = \{i : l_i > -\infty\} \;\text{ e }\; U_0 = \{i : u_i < +\infty\} \tag{55}$$

O seu dual será então definido por

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & b^T y - \sum_{j \in L_0} u_j v_j + \sum_{j \in U_0} l_j w_j \\ \text{Sujeito a} & A^T y - v + w = c \\ & v \geq 0, \quad w \geq 0 \end{array}$$

em que $-v_i$ e w_i são variáveis duais que satisfazem

$$v_i = 0, \quad i \notin U_0 \quad \text{e} \quad w_i = 0, \quad i \notin L_0$$

Consideremos agora uma solução básica associada a uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$ definida pelos conjuntos L, U e J tal que $|J| = m$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é não singular. Seja π o vector definido por

$$B^T \pi = c_J \tag{56}$$

Para que a complementaridade seja mantida é necessário que $v_j = w_j = 0$ para todo $j \in J$. Além disso, como $l_j < u_j$, então tem-se

$$x_j = l_j \Rightarrow x_j < u_j \Rightarrow v_j = 0 \Rightarrow w_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j}$$

$$x_j = u_j \Rightarrow x_j > l_j \Rightarrow w_j = 0 \Rightarrow v_j = -(c_j - \pi^T A_{\cdot j})$$

Portanto a solução π dada por (56) é dual admissível se e só se

$$\overline{c}_j \geq 0, \text{ para todo } j \in L \text{ e } \overline{c}_j \leq 0, \text{ para todo } j \in U \tag{57}$$

com

$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j}, \quad j \in L \cup U \tag{58}$$

Assim a verificação da condição de admissibilidade dual é semelhante à do caso da forma normal simples. Como exemplo de ilustração, consideremos novamente o programa linear (54). A solução básica associada à partição

$$L = \{2, 5\}, \quad U = \{4\}, \quad J = \{1, 3\}$$

é como vimos primal não admissível. Para verificar se é dual admissível, determinamos o vector π a partir de

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Então

$$\overline{c}_2 = 8 - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\overline{c}_4 = 0 - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -5$$

$$\overline{c}_5 = 9 - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

Portanto as condições (57) são verdadeiras e a solução π é dual admissível.

O método primal simplex opera em cada iteração com soluções básicas primal admissíveis. Seja $\overline{x}$ uma solução básica primal admissível associada a uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$ definida pelos conjuntos L, U e J, com $|J| = m$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ não singular. A solução dual π é então calculada a partir da resolução do sistema de equações lineares

$$B^T \pi = c_J$$

Para verificar se essa solução é dual admissível, calculam-se os coeficientes de custo reduzidos $\overline{c}_j$, $j \in L \cup U$ a partir das fórmulas (58). Se as condições (57) são verdadeiras, então a solução básica admissível é óptima para o primal e π é a solução óptima do dual. De outro modo existe pelo menos um índice s tal que

$$(\overline{c}_s < 0 \text{ e } s \in L) \text{ ou } (\overline{c}_s > 0 \text{ e } s \in U)$$

No primeiro caso a variável não básica deve ser aumentada de uma quantidade $\theta \geq 0$ do seu limite inferior l_s, enquanto que no segundo caso a variável não básica deve ser reduzida de um valor $\theta \geq 0$. A determinação do valor de θ é feita por um critério semelhante ao do critério do quociente mínimo (27) usado na forma normal simples e usa a coluna $\overline{A}_{\cdot s}$ transformada que, tal como anteriormente, se calcula a partir de

$$B\overline{A}_{\cdot s} = A_{\cdot s}$$

Então ou a função é ilimitada inferiormente, ou um valor de θ é calculado de forma a que uma das variáveis básicas x_t toma um valor igual a um dos limites inferior ou superior. Então essa variável x_t passa a não básica por troca com x_s, isto é, verificam-se as seguintes alterações:

$$
\begin{array}{c}
J = J - \{t\} \cup \{s\} \\
\begin{array}{lll}
s \in L & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} x_t \text{ passa a não básica com valor } l_t & \Rightarrow & L = L - \{s\} \cup \{t\} \\ x_t \text{ passa a não básica com valor } u_t & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} L = L - \{s\} \\ U = U \cup \{t\} \end{array} \right. \end{array} \right. \\
s \in U & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} x_t \text{ passa a não básica com valor } l_t & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} L = L \cup \{t\} \\ U = U - \{s\} \end{array} \right. \\ x_t \text{ passa a não básica com valor } u_t & \Rightarrow & U = U - \{s\} \cup \{t\} \end{array} \right.
\end{array}
\end{array} \tag{59}
$$

Poderá ainda acontecer que a variável x_s tome o valor do outro limite sem prejudicar a admissibilidade primal da solução básica. Nesse caso tem-se

$$
\begin{array}{lll}
s \in L & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} L = L - \{s\} \\ U = U \cup \{s\} \end{array} \right. \\
s \in U & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} U = U - \{s\} \\ L = L \cup \{s\} \end{array} \right.
\end{array} \tag{60}
$$

mantendo-se o conjunto J inalterado. A solução básica é então actualizada de forma semelhante ao caso da forma normal simples e uma nova iteração do método simplex deve ser efectuada com essa solução básica.

No método dual simplex a solução básica é dual admissível e portanto satisfaz as condições (57). Se as variáveis básicas x_i, $i \in J$ satisfazem a admissibilidade primal (53), então a solução básica é óptima e o método termina. De outro modo existe pelo menos um $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que

$$x_t = \bar{b}_r < l_t \quad \text{ou} \quad x_t = \bar{b}_r > u_t$$

A variável x_t deve então ser trocada com uma variável não básica x_s. Para isso, um valor de θ é calculado usando um processo semelhante ao da forma normal simples. Em particular, é necessário obter os transformados dos elementos $\bar{a}_{rj}$ da linha r de A correspondentes às variáveis não básicas, o que se pode fazer através das fórmulas (36), que requerem essencialmente um sistema com a matriz B^T. Então ou o primal é não admissível ou as variáveis x_t e x_s trocam de estatuto. Os conjuntos de índices J, L e U são então alterados a partir das fórmulas (59). A nova solução básica é determinada a partir de (51) e (52), o que significa que é necessário resolver um sistema de equações lineares com a matriz B para a obter. O processo é então repetido. Da descrição sumária destes dois métodos primal e dual simplex, chega-se à conclusão que ambos os algoritmos necessitam em cada iteração da resolução de dois sistemas com as matrizes B e B^T. Os processos de alterações das soluções básicas são um pouco mais complexas do que os descritos para a forma normal simples. Não os iremos no entanto descrever por serem extensões simples um pouco mais técnicas dos processos usados na forma normal simples.

Tal como no método primal simplex, é também possível desenvolver uma Fase 1 para obtenção de uma solução básica primal admissível. Para entender esse processo no caso da existência de limites inferiores e superiores, consideremos uma solução básica primal não admissível $\bar{x}$. Então existe pelo menos um índice $j \in J$ tal que

$$\bar{x}_j < l_j \text{ ou } \bar{x}_j > u_j$$

Na Fase 1 são acrescentadas duas variáveis x_{n+1} e x_{n+2} associadas a dois vectores $p \in \mathbb{R}^m$ e $q \in \mathbb{R}^m$ definidos por

$$p_i = \left\{ \begin{array}{rll} -1 & \text{se} & \bar{x}_j < l_j \\ 0 & \text{se} & \bar{x}_j \geq l_j \end{array} \right. \quad \text{e } q_i = \left\{ \begin{array}{rll} 1 & \text{se} & \bar{x}_j > u_j \\ 0 & \text{se} & \bar{x}_j \leq u_j \end{array} \right.$$

com x_j, $j \in J$, a variável básica associada à linha i. O programa linear a resolver nessa Fase 1 tem então a forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & x_{n+1} + x_{n+2} \\ \text{Sujeito a} & Ax + (Bp)x_{n+1} + (Bq)x_{n+2} = b \\ & l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ & x_{n+1} \geq 0, \quad x_{n+2} \geq 0 \end{array}$$

e há dois casos possíveis:

1. Se o valor óptimo desse programa é nulo, então obteve-se uma solução básica primal admissível que será a solução inicial para o método simplex.

2. Se o valor óptimo desse programa é positivo, então o programa primal é não admissível.

Como exemplo de ilustração da construção do programa linear da Fase 1 para a determinação de uma solução básica primal admissível, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{Sujeito a} & \quad x_1 + x_2 + \quad x_3 \qquad = 3 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -2 \leq x_3 \leq 0, \quad 1 \leq x_4 \leq 3 \end{array} \tag{61}$$

Consideremos a solução básica associada à partição definida por

$$J = \{1, 4\}, \quad L = \{3\}, \quad U = \{2\}$$

Então

$$g = b - \sum_{j \in L} l_j A_{\cdot j} - \sum_{j \in U} u_j A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

e

$$B\bar{b} = g \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $\overline{x} = (4,\ 1,\ -2,\ 0)$ é essa solução básica, que não é primal admissível. Para construir os vectores p e q tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 \geq 0 \\ x_4 = 0 < 1 \end{array} \right. \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Bp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 > 2 \\ x_4 = 0 \leq 3 \end{array} \right. \Rightarrow q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Bq = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto a Fase 1 procura resolver o seguinte programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_5 + x_6 \\ \text{Sujeito a} & \quad x_1 + x_2 + \quad x_3 \qquad\qquad\quad + x_6 = 3 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1 \\ & 0 \leq x_1 \leq 2,\ -1 \leq x_2 \leq 1,\ -2 \leq x_3 \leq 0,\ 1 \leq x_4 \leq 3,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 \end{array}$$

O método dual simplex necessita de uma solução básica dual admissível para se iniciar. É importante notar que se todos os limites inferiores e superiores forem finitos, então é muito fácil determinar uma tal solução. Com efeito, seja $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $|J| = m$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é não singular. Então determine-se o vector $\pi \in \mathbb{R}^m$ através de

$$B^T \pi = c_J$$

e calculem-se os coeficientes de custo reduzidos $\overline{c}_j$ por

$$\overline{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j}, \quad j \notin J$$

Se considerarmos a partição definida por J, L e U, com

$$L = \{j \notin J : \overline{c}_j \geq 0\}, \quad U = \{j \notin J : \overline{c}_j < 0\}$$

então a solução básica associada a essa partição é dual admissível e pode ser a solução básica inicial para a aplicação do método dual simplex. Como exemplo de ilustração da determinação de uma solução dual admissível, consideremos novamente o programa linear (61). Se $J = \{1, 4\}$, então a solução dual π é calculada a partir de

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\overline{c}_2 = -1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$\overline{c}_3 = 2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1$$

Então $\overline{c}_2 < 0$ e $\overline{c}_3 > 0$, pelo que ($J = \{1, 4\}$, $U = \{2\}$, $L = \{3\}$) constitui uma partição associada a uma solução dual admissível para o programa linear (61).

A simplicidade da obtenção de uma solução básica dual admissível e o bom comportamento do método dual simplex na prática, tem levado a que este algoritmo seja normalmente mais recomendado do que o primal simplex para a resolução de programas lineares com limites inferiores e superiores finitos.

22 Análise de Sensibilidade e Pós-Optimização: Introdução de Variáveis e Restrições num Programa Linear

I. INTRODUÇÃO DE UMA VARIÁVEL

Consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{62}$$

com A uma matriz de ordem $m \times n$, com a característica de A igual a $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ e seja ($\overline{x}_J = \overline{b}$, $\overline{x}_L = 0$) uma sua solução óptima ($J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $|J| = m$ e $L = \{1, 2, \ldots, n\} - J$). Seja ainda

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x + c_{n+1} x_{n+1} \\ \text{Sujeito a} & Ax + A_{\cdot n+1} x_{n+1} = b \\ & x \geq 0, \ x_{n+1} \geq 0 \end{array} \tag{63}$$

o programa linear que se obtém de (62) por acréscimo de uma variável x_{n+1}. Note-se que c_{n+1} é o coeficiente de custo associado a essa variável e $A_{\cdot n+1}$ é a coluna constituída pelos coeficientes de cada uma das restrições referentes a essa variável. Se $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$ é a matriz base associada à solução óptima $\overline{x}$ do programa (62), então ($x_J = \overline{x}, x_L = 0, x_{n+1} = 0$) é uma solução admissível de (63) e é óptima se

$$\overline{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_J^T \overline{A}_{\cdot n+1} \geq 0.$$

Se $\overline{c}_{n+1} < 0$, o método simplex pode ser iniciado com a solução básica admissível correspondente a esse conjunto J. Neste caso, x_{n+1} é a variável não básica a ser aumentada ($s = n+1$), uma vez que $\overline{c}_{n+1}$ é o único coeficiente de custo reduzido negativo. Desta discussão facilmente se conclui a enorme redução no esforço computacional para resolver o programa linear (63) se aproveitarmos a solução óptima do programa (62) para iniciarmos o processo de reoptimização. Além disso o valor óptimo do programa (63) é inferior ou igual ao do programa (62). Portanto a introdução de uma variável num programa linear implica um decréscimo ou a manutenção do valor óptimo do programa, havendo a hipótese do novo programa linear ser ilimitado.

A título de exemplo consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Este programa pode ser escrito na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{array} \tag{64}$$

A solução óptima desse programa é $\overline{x} = (0,1,0,1)$ e $J = \{2,4\}$.

Suponhamos que introduzimos neste programa (64) a variável x_5 com coeficiente de custo $c_5 = 1$ e coluna de coeficientes $[2\ 0]^T$. Então obtemos o seguinte programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 + x_5 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

Como $J = \{2,4\}$, tem-se

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja π a solução dual correspondente a J, que satisfaz $B^T\pi = c_J$. Então a solução admissível ($x_J = \overline{b}$, $x_L = 0$, $x_{n+1} = 0$) é óptima se e só se

$$\overline{c}_5 = c_5 - \pi^T A_{\cdot 5} \geq 0.$$

Da definição de π, conclui-se que

$$\overline{c}_5 = c_5 - c_J^T B^{-1} A_{\cdot 5} = c_5 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 5}$$

onde o vector $\overline{A}_{\cdot 5}$ é dado por $B\overline{A}_{\cdot 5} = A_{\cdot 5}$. Portanto

$$B\overline{A}_{\cdot 5} = A_{\cdot 5} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{c}_5 = c_5 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 5} = 1 - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - (-2) = 3 \geq 0.$$

Donde $\overline{c}_5 \geq 0$ e $\overline{x} = (0,1,0,1)$ mantém-se como solução óptima do programa modificado.

Consideremos agora o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - 3x_5 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + 2x_5 = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad = 0 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1,2,3,4,5 \end{array} \tag{65}$$

Portanto este programa difere apenas do anterior no coeficiente de custo que é (-3) em vez de 1. Donde, como anteriormente,

$$B\overline{A}_{\cdot 5} = A_{\cdot 5} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{c}_5 = c_5 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 5} = -3 - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 - (-2) = -1 < 0.$$

Assim a solução óptima do programa linear inicial (64) não é óptima para o programa linear (65) e devemos usar o método simplex para resolver o programa modificado, partindo da solução básica admissível associada ao conjunto $J = \{2, 4\}$. Como $\overline{c}_5$ é o único $\overline{c}_j$ ($j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} - J$) negativo, então $s = 5$. Para determinar a variável básica que troca com x_5 usamos a coluna $\overline{A}_{\cdot 5}$ já calculada para obter

$$\theta = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{r5}} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i5}} : \overline{a}_{i5} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1.$$

Donde $r = 1$. Como x_2 é a variável básica correspondente a $r = 1$, os conjuntos J e L são actualizados para

$$J = J - \{2\} \cup \{5\} = \{5, 4\}, \quad L = \{1, 2, 3\}$$

e o vector $\overline{b}$ é actualizado através de

$$\overline{b}_1 = \theta = 1$$

$$\overline{b}_2 = \overline{b}_2 - \theta \overline{a}_{25} = 1 - (1)(1) = 0$$

A nova solução básica é dada por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 1)$. Além disso a matriz base associada a essa solução é

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar se essa solução é dual admissível, determina-se o vector π através de

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\overline{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -3$$

$$\overline{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 1 - \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \frac{5}{2}$$

$$\overline{c}_2 = c_2 - \pi^T A_{\cdot 2} = -2 - \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\overline{c}_3 = c_3 - \pi^T A_{\cdot 3} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

Donde $\overline{c}_j \geq 0$ para todos $j \in L$ e a solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 1)$ é óptima, com valor óptimo igual a $\overline{z} = -3$. É de notar que o valor óptimo do programa (65) é (-3), enquanto que o do programa (64) é (-2). Portanto houve um decréscimo no valor óptimo, o que está de acordo com o referido anteriormente.

Consideremos agora o programa

$$\begin{array}{lllllll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 & & & - 3x_5 & \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 & + x_3 & & - 2x_5 & = 2 \\ & x_1 - x_2 & & + x_4 & & = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 & & & & \end{array}$$

que tal como os dois últimos se obteve de (64) por introdução da variável x_5. Como $J = \{2, 4\}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são o conjunto dos índices das variáveis básicas e a base associadas à solução óptima de (64), então

$$B\overline{A}_{\cdot 5} = A_{\cdot 5} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{c}_5 = c_5 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 5} = -3 - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3 - 2 = -5 < 0.$$

Assim a solução óptima do programa linear inicial (64) não é óptima para o programa linear (65) e devemos usar o método simplex para resolver o problema modificado iniciando com a solução básica admissível associada ao conjunto $J = \{2, 4\}$. Como $\overline{c}_5$ é o único coeficiente de custo reduzido negativo, então $s = 5$. Como $\overline{a}_{i5} \leq 0$, para $i = 1, 2$, o programa linear é ilimitado.

II. INTRODUÇÃO DE UMA DESIGUALDADE

Suponhamos que pretendemos acrescentar ao programa linear (62) a desigualdade

$$a^T x \leq b_{m+1}$$

Se x_{n+1} é a variável de desvio correspondente a essa restrição, então podemos escrever o novo programa linear na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & a^T x + x_{n+1} = b_{m+1} \\ & x \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0 \end{array} \tag{66}$$

Seja $\overline{x}$ uma solução básica óptima do programa (62), $\overline{J}$ o correspondente conjunto de índices das variáveis básicas e $\overline{B} = [A_{\cdot j}]_{j \in \overline{J}}$ a matriz base associada a essa solução. Como o programa (66) contém mais uma restrição, então qualquer solução básica desse programa tem que ter $(m+1)$ variáveis básicas. Por isso a matriz base associada a uma solução básica desse programa tem ordem $(m+1) \times (m+1)$. Como $\overline{x}$ é uma solução básica dada, então

$$(\overline{x}, \overline{x}_{n+1} = b_{m+1} - a^T \overline{x})$$

é uma solução básica de (66) . O seu conjunto de índices das variáveis básicas é dado por

$$J = \overline{J} \cup \{n+1\}$$

e

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} \overline{B} & 0 \\ a_{\overline{J}}^T & 1 \end{bmatrix}$$

onde $a_{\overline{J}}$ contém as componentes do vector a que pertencem a $\overline{J}$. Como

$$\begin{bmatrix} \overline{B} & 0 \\ a_{\overline{J}}^T & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \pi \\ \pi_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\overline{J}} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \pi \\ \pi_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B}^{-T} c_{\overline{J}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

então $\overline{c}_j \geq 0$ $(j \in \{1, 2, \ldots, n\} - \overline{J})$ e a solução básica associada a J é dual admissível. Para verificar se é primal admissível temos de calcular os valores das variáveis básicas. Mas

$$\begin{bmatrix} \overline{B} & 0 \\ a_{\overline{J}}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\overline{J}} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{\overline{J}} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{b}_{m+1} \end{bmatrix}$$

com

$$\overline{b}_{m+1} = b_{m+1} - a_J^T \overline{b} \tag{67}$$

Dois casos podem acontecer e são apresentados a seguir.

1. Se $\overline{b}_{m+1} \geq 0$, a desigualdade acrescentada é verificada em $\overline{x}$ e a solução básica

$$x_J = \overline{b}, \quad x_{n+1} = \overline{b}_{m+1}, \quad x_L = 0 \tag{68}$$

   com $L = \{1, 2, \ldots, n, n+1\} - J$ é óptima e o valor óptimo $\overline{z}$ é igual ao do programa (62).

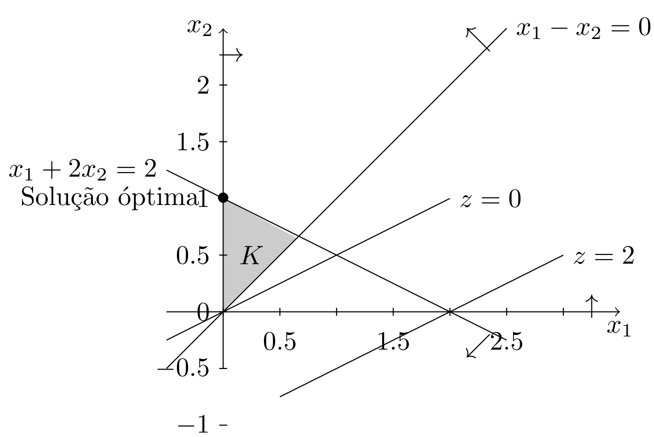
2. Se $\overline{b}_{m+1} < 0$, a desigualdade acrescentada não é verificada em $\overline{x}$ e a solução básica (68) é primal inadmissível. Como essa solução é dual admissível, então o método dual simplex pode ser usado para resolver o programa linear (66) a partir da solução básica associada a J. Portanto ou esse programa é inadmissível ou obtêm-se uma sua solução óptima cujo valor óptimo é maior ou igual do que o do programa anterior.

Esta discussão permite-nos concluir que a introdução duma desigualdade no conjunto admissível de um programa linear ou o torna inadmissível ou então a sua solução óptima tem um valor óptimo superior ou igual ao valor óptimo do programa original. Seguidamente apresentamos exemplos ilustrativos dos vários casos possíveis.

Consideremos o programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \tag{69}$$

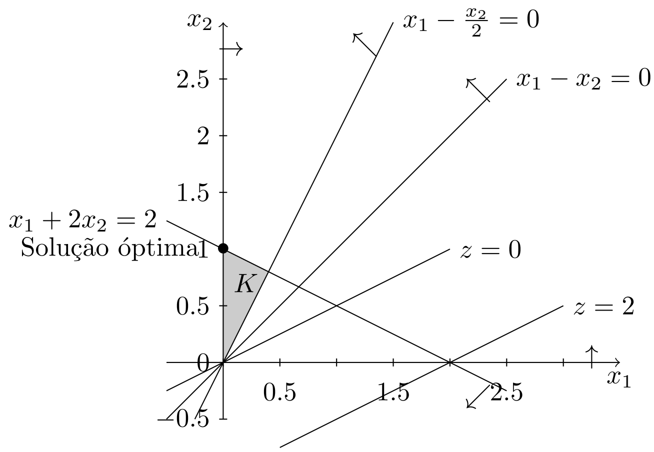
Como vimos anteriormente esse programa tem solução óptima $\overline{x} = (0, 1, 0, 1)$ com conjunto $\overline{J} = \{2, 4\}$. A figura apresentada a seguir representa geometricamente o conjunto admissível desse programa e a respectiva solução óptima.



Se introduzirmos a desigualdade

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 0$$

então o conjunto admissível passa a ser representado pela seguinte figura



Então a solução óptima do programa anterior permanece no conjunto admissível do novo programa, pelo que se mantém óptima para esse programa. Isso é confirmado pela discussão a seguir apresentada. Se introduzirmos a variável de desvio x_5 podemos escrever a desigualdade anterior como a seguinte igualdade

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_5 = 0$$

Como $\overline{J} = \{2, 4\}$ e $\bar{b} = (1\ 1)^T$, então de acordo com (67), vem

$$\bar{b}_3 = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \geq 0$$

Portanto a solução básica associada a $J = \{2, 4, 5\}$ é óptima para o novo programa linear. Os valores das variáveis básicas dessa solução são

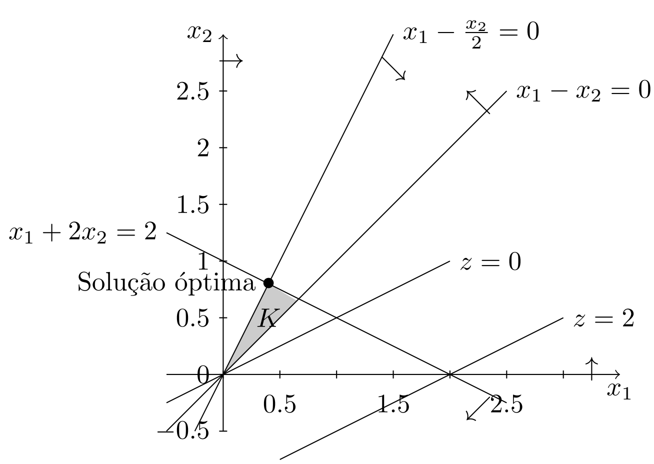
$$x_2 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = \frac{1}{2}$$

e o valor óptimo não sofreu alteração.

Consideremos agora a introdução da restrição

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \Leftrightarrow -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 0$$

no programa anterior. Então o conjunto admissível do novo programa tem a seguinte representação gráfica



Portanto a solução óptima do programa anterior não permanece ao conjunto admissível do novo programa, pelo que a solução óptima deste último programa tem valor óptimo superior ao do anterior. Para obter essa solução escrevemos na forma normal o programa que se obteve de (69) por acréscimo da restrição $x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 2 \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 & & = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \quad\quad + x_5 & & = 0 \end{array} \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

Então $\bar{b}_3$ é calculado a partir da fórmula (67) e tem-se

$$\bar{b}_3 = 0 - \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} < 0$$

Portanto o método dual simplex deve ser utilizado para calcular a solução óptima do novo programa. A solução básica inicial tem associada $J = \{2, 4, 5\}$ e é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\overline{J}} \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow r = 3$$

Esta solução é dual admissível, pois

$$B^T\pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e para $j \in L = \{1, 3\}$

$$\bar{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{.1} = 1 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

$$\bar{c}_3 = c_3 - \pi^T A_{.3} = 0 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \geq 0$$

Para calcular $\bar{a}_{rj}$, $j \in L$ tem-se

$$B^T\beta = e^r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{a}_{rj} = \beta^T A_{.j} \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{31} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{5}{4} \\ \bar{a}_{33} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Para determinar a variável não básica x_s, vem

$$\theta = \min\left\{ \frac{2}{-(-5/4)}, \frac{1}{-(-1/4)} \right\} = \frac{8}{5} \Rightarrow s = 1$$

Então x_5 (variável na linha 3) troca com x_1, ou seja, J é actualizado da seguinte forma

$$J = J - \{5\} \cup \{1\} = \{2, 4, 1\}$$

Donde $L = \{3, 5\}$ e

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes de custo reduzidos $\bar{c}_j$, $j \in L$ são actualizados a partir de

$$\begin{cases} \bar{c}_3 = \bar{c}_3 + \theta \bar{a}_{33} = 1 + \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5} \\ \bar{c}_5 = \theta = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Na iteração seguinte calcula-se $\bar{b}$ por

$$B\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Donde a solução básica é admissível e portanto é óptima. Essa solução é definida por $(\bar{x}_J = \bar{b}, \bar{x}_L = 0)$, ou seja,

$$x_1 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{5}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{2}{5}, \quad x_5 = 0$$

e o valor óptimo da função é

$$\bar{z} = c_J^T \bar{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = -\frac{6}{5}.$$

Consideremos agora a introdução da restrição

$$-x_1 + x_2 \leq -1$$

no programa linear (69). Facilmente se verifica que essa restrição não intersecta o conjunto admissível do programa (69) e que por isso o programa linear resultante é inadmissível. Para verificar isso analiticamente escrevemos esse programa na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ & -x_1 + x_2 + x_5 = -1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

Como $\overline{J} = \{2, 4\}$ e $\bar{b} = (1\ 1)^T$, então, usando a fórmula (65), vem

$$\bar{b}_3 = -1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 < 0$$

Portanto, e tal como no exemplo anterior, é necessário resolver esse programa usando o método dual simplex. A solução inicial tem associada o conjunto $J = \{2, 4, 5\}$ e é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\overline{J}} \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow r = 3$$

Esta solução é dual admissível, pois $\bar{c}_1 = 2 \geq 0$ e $\bar{c}_3 = 1 \geq 0$. Para calcular $\bar{a}_{rj}$, $j \in L$ tem-se

$$B^T \beta = e^r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{a}_{rj} = \beta^T A._j \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{31} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2} \\ \overline{a}_{33} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Para determinar a variável não básica x_s, vem

$$\theta = \min\left\{\frac{2}{-(-3/2)}, \frac{1}{-(-1/2)}\right\} = \frac{4}{3} \Rightarrow s = 1$$

Então x_5 (variável na linha 3) troca com x_1, ou seja, J é actualizado da seguinte forma

$$J = J - \{5\} \cup \{1\} = \{2, 4, 1\}$$

Donde $L = \{3, 5\}$ e

$$B = [A._j]_{j\in J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os valores de $\overline{c}_j$, $j \in L$ são actualizados a partir de

$$\begin{cases} \overline{c}_3 = \overline{c}_3 + \theta\overline{a}_{33} = 1 + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \\ \overline{c}_5 = \theta = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Na iteração seguinte calcula-se $\overline{b}$ por

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow r = 2$$

Para determinar $\overline{a}_{rj}$, $j \in L$ tem-se

$$B^T\beta = e^r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{a}_{rj} = \beta^T A._j \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \overline{a}_{35} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \end{cases}$$

Como $\overline{a}_{rj} \geq 0$ para todo $j \notin J$, o programa é inadmissível.

III. INTRODUÇÃO DE UMA IGUALDADE

Consideremos novamente o programa linear (62) e seja ($x_{\overline{J}} = \overline{b}$, $x_L = 0$) uma sua solução básica óptima. Suponhamos que introduzimos a igualdade

$$a^T x = b_{m+1}$$

nesse programa de modo a transformá-lo em

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & a^T x = b_{m+1} \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{70}$$

A restrição de igualdade pode ser escrita na forma

$$a^T x + x_{n+1} = b_{m+1}, \quad x_{n+1} = 0$$

Portanto, e à semelhança da introdução duma desigualdade, começamos por considerar a solução básica de (70) com variáveis básicas x_i, $i \in \overline{J}$ e x_{n+1} (ou seja $J = \overline{J} \cup \{n+1\}$). Como vimos anteriormente, o transformado $\overline{b}_{m+1}$ de b_{m+1} satisfaz

$$\overline{b}_{m+1} = b_{m+1} - a_{\overline{J}}^T \overline{b}$$

Três casos podem acontecer e são discutidos a seguir.

1. Se $\overline{b}_{m+1} = 0$, a solução óptima do programa (62) é também solução óptima do programa (70).

2. Se $\overline{b}_{m+1} < 0$, então x_{n+1} deve passar a não básica por uma iteração do método dual simplex (ver o caso da introdução duma desigualdade). Se não for possível tornar x_{n+1} não básica, então a variável x_{n+1} toma sempre valores negativos no conjunto de restrições do programa (62) e portanto o programa (70) é inadmissível. De outro modo x_{n+1} passa a não básica e deve ser desprezada de seguida. O método dual simplex é usado até ao fim, terminando com uma solução óptima do programa (70) ou com a indicação de que o programa (70) é inadmissível.

3. Se $\overline{b}_{m+1} > 0$, a restrição introduzida $a^T x = b_{m+1}$ do programa (70) deve ser substituída pela restrição equivalente $-a^T x = -b_{m+1}$. Com esta restrição, $\overline{b}_{m+1} < 0$ e o processo descrito em 2. pode ser aplicado com as mesmas conclusões.

Notar que este processo é consequência do facto de uma igualdade $a^T x = b_{m+1}$ ser equivalente a duas desigualdades

$$a^T x \leq b_{m+1}, \quad a^T x \geq b_{m+1}$$

Além disso, e como no caso de desigualdades, se uma igualdade é introduzida num programa linear, então o novo programa ou é inadmissível ou então tem uma solução óptima com valor óptimo maior ou igual do que o do anterior.

Como exemplo de ilustração deste procedimento, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

O conjunto admissível deste programa e a sua solução óptima estão representadas na primeira figura da subsecção II. anterior. Se introduzirmos a restrição $x_1 - 1/2x_2 = 0$, então o conjunto admissível do programa resultante é o segmento de recta OP da terceira figura dessa subsecção e P é a solução óptima desse programa. Considerando as variáveis de desvio x_3 e x_4 e a restrição adicional, obtemos o seguinte programa linear

$$\begin{array}{lllll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 & & & \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 2 \\ & x_1 - x_2 & + x_4 & = 0 \\ & x_1 - \frac{1}{2}x_2 & & = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 & & \end{array}$$

A solução óptima do programa original é $\overline{x} = (0,1,0,1)$ e o conjunto de índices das variáveis básicas $\overline{J} = \{2,4\}$. Então começamos por calcular o transformado $\overline{b}_3$ de b_3 e tem-se

$$\overline{b}_3 = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

Assim devemos substituir a restrição introduzida pela restrição equivalente $-x_1 + 1/2x_2 = 0$. Portanto obtemos o programa linear equivalente

$$\begin{array}{lllll} \text{Minimize } z = & x_1 - 2x_2 & & & \\ \text{Sujeito a} & x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 2 \\ & x_1 - x_2 & + x_4 & = 0 \\ & -x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 & & \end{array}$$

A restrição de igualdade introduzida vai ser escrita na forma $-x_1 + 1/2x_2 + x_5 = 0$ e a variável x_5 deve passar a não básica por uma iteração do método dual simplex. A solução básica inicial tem associada o conjunto $J = \{2,4,5\}$ e é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\overline{J}} \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ -\overline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow r = 3$$

Para calcular $\overline{a}_{rj}$, $j \in L$ tem-se

$$B^T\beta = e^r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{a}_{rj} = \beta^T A_{.j} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{31} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{5}{4} \\ \overline{a}_{33} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Como vimos na subsecção II. anterior, $\overline{c}_1 = 2 \geq 0$ e $\overline{c}_3 = 1 \geq 0$. A coluna s é determinada a partir de

$$\theta = \min\left\{\frac{2}{-(-5/4)}, \frac{1}{-(-1/4)}\right\} = \frac{8}{5} \Rightarrow s = 1$$

Então x_5 (variável na linha 3) troca com x_1, ou seja, J é actualizado da seguinte forma

$$J = J - \{5\} \cup \{1\} = \{2,4,1\}$$

A variável x_5 deixa de ser considerada e por isso $L = \{3\}$. Os valores de $\overline{c}_j$, $j \in L$ são actualizados a partir de

$$\overline{c}_3 = \overline{c}_3 + \theta\overline{a}_{33} = 1 + \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5}$$

Na iteração seguinte calcula-se $\overline{b}$ por

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Donde a solução básica é admissível e portanto é óptima. Essa solução é definida por $(\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0)$, ou seja,

$$x_1 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{5}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{2}{5}, \quad x_5 = 0$$

e o valor óptimo da função é

$$\overline{z} = c_J^T \overline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = -\frac{6}{5}.$$

23 Análise de Sensibilidade e Pós-Optimização: Alteração dos Coeficientes de um Programa Linear

I. MODIFICAÇÃO DOS TERMOS INDEPENDENTES DAS RESTRIÇÕES

Consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = d \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{71}$$

e seja $(\overline{x}_J = \overline{d}, \overline{x}_L = 0)$ uma sua solução básica óptima. Se B é a base associada a essa solução, então $\overline{d}$ satisfaz

$$B\overline{d} = d$$

Se agora considerarmos o programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{72}$$

com $b \neq d$, podemos usar a solução básica anterior como solução inicial. Assim o transformado $\bar{b}$ de b é dado por

$$B\bar{b} = b$$

Como os programas lineares (71) e (72) têm os mesmos coeficientes de custo, então a solução básica $(\overline{x}_J = \bar{b}, \overline{x}_L = 0)$ é dual admissível. Se $\bar{b} \geq 0$, essa solução é óptima para o programa (72). De outro modo o método dual simplex deve ser usado para resolver o programa (72) iniciando com a solução básica referida.

Como exemplo de ilustração, consideremos o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

Este programa pode ser escrito na forma normal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array} \tag{73}$$

Consideremos a solução básica associada a $J = \{2, 3\}$. Então

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e

$$B\bar{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $\overline{x} = (0\ 5\ 1\ 0\ 0)^T$ é primal admissível. Para verificar se é dual admissível e portanto óptima, calcula-se π a partir de

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e tem-se

$$\overline{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{.1} = 4 - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \geq 0$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \geq 0$$

$$\overline{c}_5 = c_5 - \pi^T A_{\cdot 5} = 0 - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \geq 0$$

Portanto $\overline{x}$ é a solução óptima do programa. Consideremos agora o programa linear obtido de (73) por substituição de b_3 de 4 para 8. Então o transformado $\overline{b}$ do novo vector b satisfaz

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução básica ($\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0$) não é admissível e devemos usá-la como solução inicial do método dual simplex para a resolução do programa linear modificado. Então $r = 2$ e a variável correspondente x_3 deve deixar de ser básica. Para calcular $\overline{a}_{rj}$, $j \in L$ tem-se

$$B^T \beta = e^r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{a}_{rj} = \beta^T A_{\cdot j} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \\ \overline{a}_{24} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \\ \overline{a}_{25} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para determinar a coluna s, usam-se os coeficientes de custo reduzidos associados à solução básica óptima do programa anterior e tem-se

$$\theta = \min \left\{ \frac{4}{-(-1/2)} \right\} = 8 \Rightarrow s = 1$$

Então x_3 (variável na linha 2) troca com x_1, ou seja, J é actualizado da seguinte forma

$$J = J - \{3\} \cup \{1\} = \{2, 1\}$$

Donde $L = \{3, 4, 5\}$ e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Os valores de $\overline{c}_j$, $j \in L$ são actualizados a partir de

$$\overline{c}_3 = \theta = 8$$

$$\overline{c}_4 = \overline{c}_4 + \theta \overline{a}_{24} = 2 + 8\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$\overline{c}_5 = \overline{c}_5 + \theta \overline{a}_{25} = 1 + 8\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

Na iteração seguinte calcula-se $\overline{b}$ por

$$B\overline{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde a solução básica é admissível e portanto é óptima. Portanto a solução óptima do novo programa linear é

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

e o valor óptimo da função é

$$\overline{z} = c_J^T \, \overline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4.$$

Na prática, após a determinação de uma solução óptima de um programa dado, interessa muitas vezes conhecer o intervalo a que um dado termo independente b_r deve pertencer de modo a que o conjunto J associado à solução óptima permaneça inalterado. A obtenção desse intervalo é relativamente fácil de fazer usando o conceito de solução básica admissível. A título de exemplo, consideremos o programa linear que se obtém de (71) considerando a segunda componente b_2 como um parâmetro. Então $b = [6\ b_2]^T$ e a solução básica associada ao conjunto $J = \{2, 3\}$ óptimo satisfaz

$$B\bar{b} = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \frac{1}{2}b_2 \\ 3 - \frac{1}{2}b_2 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução $(\bar{x}_J = \bar{b}, \bar{x}_L = 0)$ é admissível se

$$\bar{b} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 + \frac{1}{2}b_2 \geq 0 \\ 3 - \frac{1}{2}b_2 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_2 \geq -6 \\ b_2 \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow b_2 \in [-6,\ 6]$$

Deste modo, o termo independente b_2 pode pertencer ao intervalo $[-6, 6]$ sem alteração da base óptima. Além disso a expressão geral das soluções óptimas é

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(0, 3 + \tfrac{1}{2}b_2, 3 - \tfrac{1}{2}b_2, 0, 0\right)$$

e os valores óptimos correspondentes satisfazem $\bar{z} = -12 + b_2$.

II. MODIFICAÇÃO DE UM COEFICIENTE DE CUSTO DA FUNÇÃO OBJECTIVO

Consideremos novamente o programa linear (60) e seja $(\bar{x}_J = \bar{b}, \bar{x}_L = 0)$ uma sua solução básica óptima. Se um coeficiente de custo c_j for alterado para $\widetilde{c}_j$, dois casos podem acontecer e são discutidos a seguir.

1. Se $j \in L$, isto é, se o coeficiente de custo modificado corresponde a uma variável não básica da solução óptima de (60), então calcula-se o transformado de $\widetilde{c}_j$ por

   $$\bar{c}_j = \widetilde{c}_j - c_J^T \overline{A}_{\cdot j}$$

   com

   $$B\overline{A}_{\cdot j} = A_{\cdot j}$$

   Se $\bar{c}_j \geq 0$, a solução óptima do programa (60) é também óptima para o programa modificado. De outro modo o método simplex é iniciado com a solução básica associada a J.

2. Se $j \in J$, isto é, se o coeficiente de custo modificado corresponde a uma variável básica da solução óptima de (60), então o vector c_J é modificado para $\widetilde{c}_J$, com

   $$\widetilde{c}_i = c_i, \quad i \neq j.$$

   Então o vector π das variáveis duais é calculado por

   $$B^T \pi = \widetilde{c}_J$$

   e isso permite determinar os coeficientes de custo reduzidos referentes às variáveis não básicas

   $$\bar{c}_j = c_j - \pi^T A_{\cdot j},\ j \in L.$$

   Se $\bar{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$, a solução óptima do programa (60) associada ao conjunto J é também óptima para o programa modificado. De outro modo o método simplex é iniciado com essa solução básica.

Como exemplo de ilustração, consideremos novamente o programa linear (71)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

cuja solução óptima é $\overline{x} = (0, 1, 5, 0, 0)$ com conjunto $J = \{2, 3\}$. Suponhamos que o coeficiente de custo da variável x_1 na função objectivo do programa linear (71) é alterado para $\widetilde{c}_1 = -1$. Como x_1 é não básica na solução óptima do programa linear (71), então determinam-se os transformados $\overline{A}_{\cdot 1}$ e $\overline{c}_1$ através de

$$B\overline{A}_{\cdot 1} = A_{\cdot 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{c}_1 = \widetilde{c}_1 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 1} = -1 - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

Assim a solução óptima do programa inicial (73) não é óptima para o programa linear modificado e o método simplex deve ser usado para resolver o programa modificado, com início na solução básica associada ao conjunto $J = \{2, 3\}$. Para determinarmos a variável básica que troca com x_1 utilizamos o critério do quociente

$$\theta = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{r1}} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i1}} : \overline{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{5}{3/2} \right\} = \frac{10}{3}.$$

Donde $r = 1$. Como x_2 é a variável básica correspondente a $r = 1$, os conjuntos J e L são actualizados para

$$J = J - \{2\} \cup \{1\} = \{1, 3\}, \quad L = \{2, 4, 5\}$$

e o vector $\overline{b}$ é actualizado através de

$$\overline{b}_1 = \theta = \frac{10}{3}$$

$$\overline{b}_2 = \overline{b}_2 - \theta \overline{a}_{21} = 1 - \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

A nova solução básica é dada por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, 0\right)$. Além disso a matriz base associada a essa solução é

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Para verificar se essa solução é óptima, calcula-se o vector π por

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Então

$$\overline{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{34}{3}$$

$$\overline{c}_2 = c_2 - \pi^T A_{\cdot 2} = -1 - \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{3}$$

$$\overline{c}_5 = c_5 - \pi^T A_{\cdot 5} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}$$

Donde $\overline{c}_j \geq 0$ para $j \in L$ e a solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, 0\right)$ é óptima, sendo $\overline{z} = -34/3$ o valor óptimo do programa modificado.

Tal como anteriormente, é possível determinar os valores que um coeficiente de custo pode tomar sem alterar a base óptima de um programa linear. No exemplo anterior para o coeficiente de custo c_1 calcula-se

$$\overline{c}_1 = c_1 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 1} = c_1 - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = c_1$$

e a solução $(\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0)$ é dual admissível e portanto óptima se

$$\overline{c}_1 \geq 0 \Leftrightarrow c_1 \geq 0.$$

Portanto a solução básica $(\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0)$ é óptima para qualquer programa linear dependente do parâmetro c_1, desde que $c_1 \geq 0$.

Consideremos agora o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

que foi obtido de (73) substituindo o coeficiente de custo da variável x_3 na função objectivo por $\widetilde{c}_3 = 3$. Como x_3 é básica na solução óptima do programa (73), então determina-se a solução dual π a partir de

$$B^T \pi = \widetilde{c}_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para verificar se a solução é dual admissível, calculam-se os coeficientes $\overline{c}_j$ para $j \in L$

$$\overline{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 4 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$$

$$\overline{c}_5 = c_5 - \pi^T A_{\cdot 5} = 0 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -2$$

Portanto, a solução não é dual admissível e por isso o método simplex deve ser usado para resolver o programa modificado, com início na solução básica associada ao conjunto $J = \{2, 3\}$. Então $s = 5$ e

$$B\overline{A}_{\cdot 5} = A_{\cdot 5} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{A}_{\cdot 5} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Para determinar a variável básica x_t que troca com x_5, tem-se

$$\theta = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{r5}} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i5}} : \overline{a}_{i5} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1/2} \right\} = 2$$

Donde $r = 2$, $t = 3$, J e L são actualizados por

$$J = J - \{3\} \cup \{5\} = \{2, 5\}, \quad L = \{1, 3, 4\}$$

e o vector $\overline{b}$ é actualizado através de

$$\overline{b}_1 = \overline{b}_1 - \theta \overline{a}_{15} = 5 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$\overline{b}_2 = \theta = 2$$

A nova solução básica é dada por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 0, 0, 2)$. Além disso a matriz base associada a essa solução é

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para verificar se essa solução básica é óptima, calcula-se o vector das variáveis duais π através de

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\overline{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -6$$

$$\overline{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 4 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

$$\overline{c}_3 = c_3 - \pi^T A_{\cdot 3} = 3 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Donde $\overline{c}_j \geq 0$ para $j \in L$ e a solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 0, 0, 2)$ é óptima, sendo $\overline{z} = -6$ o valor óptimo do programa modificado.

Tal como anteriormente, podemos estar interessados em determinar os valores que um coeficiente de custo associado a uma variável básica pode tomar de modo a que a solução óptima permaneça inalterada. No exemplo anterior seja c_3 o parâmetro que indica o valor do coeficiente de custo da variável não básica x_3. Então

$$B^T \pi = \widetilde{c}_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ c_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3 \end{bmatrix}$$

e os coeficientes de custo reduzidos $\overline{c}_j$, para $j \in L$, são dados por

$$\overline{c}_1 = c_1 - \pi^T A_{\cdot 1} = 4 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}c_3$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3$$

$$\overline{c}_5 = c_5 - \pi^T A_{\cdot 5} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3$$

A solução $(\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0)$ é dual admissível se $\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$. Portanto a solução básica é dual admissível se

$$\begin{cases} \overline{c}_1 \geq 0 \\ \overline{c}_4 \geq 0 \\ \overline{c}_5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{2} + \frac{1}{2}c_3 \geq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3 \geq 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 \geq -11 \\ c_3 \leq 1 \\ c_3 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow c_3 \in [-11, -1].$$

Deste modo, o coeficiente de custo c_3 pode pertencer ao intervalo $[-11, -1]$ sem alterar a solução óptima do programa linear. Além disso, os valores da função linear dependem de c_3 através de $\overline{z} = -1 + c_3$.

III. MODIFICAÇÃO DE UM COEFICIENTE TECNOLÓGICO DAS RESTRIÇÕES

Para terminar esta secção iremos estudar o efeito que a modificação de um elemento a_{ij} da matriz A das restrições de igualdade $Ax = b$ tem na solução óptima de um programa linear. Seja $\overline{x}$ a solução óptima do programa (62), J o conjunto dos índices das variáveis básicas dessa solução e $B = [A_{\cdot j}]_{j \in J}$. Suponhamos que o elemento a_{rs} foi modificado para $\widetilde{a}_{rs}$. Tal como no caso dos coeficientes de custo, devemos considerar dois casos, que são discutidos a seguir.

1. $s \in L$, isto é, o elemento em causa está associado a uma coluna de uma variável não básica da solução óptima do programa linear (62). Seja $\widetilde{A}_{\cdot s}$ a coluna modificada cujos elementos satisfazem

$$\widetilde{a}_{is} = a_{is}, \quad i \neq r$$

Então a transformada $\widetilde{A}_{\cdot s}$ dessa coluna é dada por

$$B\overline{A}_{\cdot s} = \widetilde{A}_{\cdot s}$$

e podemos calcular o coeficiente de custo reduzido $\overline{c}_s$ a partir de

$$\overline{c}_s = c_s - c_J^T \overline{A}_{\cdot s}$$

Se $\overline{c}_s \geq 0$, a solução óptima do programa original é também solução óptima do programa modificado. De outro modo, o método simplex é iniciado com a solução básica admissível associada a esse conjunto J.

2. Se $s \in J$, a alteração do elemento a_{rs} pode tornar a matriz B singular. Por isso e contrariamente aos casos anteriores, é em geral melhor resolver o programa modificado sem tirar partido da solução óptima do programa anterior.

Como exemplo de ilustração, consideremos novamente o programa linear (73)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

cuja solução óptima é $\overline{x} = (0, 1, 5, 0, 0)$ com conjunto $J = \{2, 3\}$. Suponhamos que o coeficiente tecnológico da variável x_1 na segunda restrição do programa linear é alterado para $\widetilde{a}_{21} = 7$. Como x_1 é não básica na solução óptima do programa linear (73), então calcula-se $\overline{A}_{\cdot 1}$ a partir de

$$B\overline{A}_{\cdot 1} = \widetilde{A}_{\cdot 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

O transformado do coeficiente $\overline{c}_1$ é dado por

$$\overline{c}_1 = c_1 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 1} = 4 - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

Assim, a solução óptima do programa inicial não é óptima para o programa modificado e o método simplex deve ser usado para resolver o programa linear modificado, com início na solução básica associada ao conjunto $J = \{2, 3\}$. Então

$$\theta = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{r1}} = \min\left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i1}} : \overline{a}_{i1} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{5}{4} \right\} = \frac{5}{4}$$

e $r = 1$. Como x_2 é a variável básica correspondente a $r = 1$, os conjuntos J e L são actualizados através de

$$J = J - \{2\} \cup \{1\} = \{1, 3\}, \quad L = \{2, 4, 5\}$$

e o vector $\overline{b}$ é actualizado através de

$$\overline{b}_1 = \theta = \frac{5}{4}$$

$$\overline{b}_2 = \overline{b}_2 - \theta \overline{a}_{21} = 1 - \frac{5}{4}(-3) = \frac{19}{4}$$

A nova solução básica é dada por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{19}{4}, 0, 0\right)$. Além disso a matriz base associada a essa solução é

$$B = [A_{\cdot j}]_{j \in J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Para verificar se a nova solução básica é dual admissível, calcula-se π por

$$B^T \pi = c_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \pi = \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

Então

$$\overline{z} = \pi^T b = \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{37}{4}$$

$$\overline{c}_2 = c_2 - \pi^T A_{\cdot 2} = -1 - \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{c}_4 = c_4 - \pi^T A_{\cdot 4} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{17}{8}$$

$$\overline{c}_5 = c_5 - \pi^T A_{\cdot 5} = 0 - \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{7}{8}$$

Donde $\overline{c}_j \geq 0$ para todo $j \in L$ e a solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{19}{4}, 0, 0\right)$ é óptima, com valor óptimo $\overline{z} = -37/4$.

Tal como anteriormente, podemos determinar o conjunto de valores que um coeficiente a_{ij} associado a uma variável não básica de uma solução óptima pode tomar de modo a que a solução óptima permaneça inalterada. No exemplo anterior se representarmos por a_{21} os valores que esse coeficiente pode tomar, tem-se

$$B\overline{A}_{\cdot 1} = \widetilde{A}_{\cdot 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} \\ \overline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_{21} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_{21} \end{bmatrix}$$

O transformado do coeficiente $\overline{c}_1$ é dado por

$$\overline{c}_1 = c_1 - c_J^T \overline{A}_{\cdot 1} = 4 - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_{21} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_{21} \end{bmatrix} = 6 - a_{21}$$

e a solução $(\overline{x}_J = \overline{b}, \overline{x}_L = 0)$ é dual admissível se

$$\overline{c}_1 \geq 0 \Leftrightarrow 6 - a_{21} \geq 0 \Leftrightarrow a_{21} \leq 6.$$

Deste modo, o coeficiente da variável x_1 da segunda restrição do programa linear (73) pode tomar um qualquer valor não superior a 6 sem alterar a solução óptima do programa dado.

Exercícios

1. Um banco tem três actividades principais a desenvolver, a que estão ligadas três variáveis (níveis de decisão), nomeadamente o nível dos seus saldos de tesouraria ("cash"), a sua actividade prestamista e a compra de acções. Face a certas restrições legais os saldos de tesouraria devem constituir pelo menos 30% dos depósitos totais e as acções não podem ultrapassar 65% desses mesmos depósitos. Os depósitos totais são de 20 mil milhões de euros e os saldos de tesouraria, os empréstimos e as acções não podem exceder os depósitos totais. O juro dos empréstimos é de 8%, o das acções é de 9% e é nulo o dos saldos de tesouraria. O banco deseja maximizar os juros provenientes daquelas três actividades bancárias. Formule o problema como um programa linear.

2. Uma companhia aérea está a planear adquirir um nova frota de aviões de passageiros para cobrirem rotas de longo (LA), médio (MA) e curto (CA) alcance. O preço da compra é de 67, 50 e 35 milhões de euros por unidade, respectivamente de aviões do tipo LA, MA e CA. O conselho de administração da companhia autorizou um orçamento máximo de 500 milhões de euros para a compra de novos aviões.

   Independentemente do tipo de aviões a comprar, sabe-se que eles serão utilizados no máximo das suas capacidades. Assim, estima-se que o lucro líquido de cada avião seja de 42, 30 e 23 milhões de euros para aviões do tipo LA, MA e CA, respectivamente.

   Prevê-se a existência de um número suficiente de pilotos para a companhia operar até 30 novos aviões. Se se comprassem apenas aviões de CA as oficinas de manutenção poderiam operar até 40 desses novos aviões; contudo, em termos de utilização dessas oficinas, cada avião de MA é equivalente a $11/3$ aviões de CA e cada avião de LA é equivalente a 4 aviões de MA.

   Toda esta informação foi constituída para uma análise preliminar do problema. Com estes dados, como uma primeira aproximação, o gabinete de planeamento e gestão deseja saber quantos aviões de cada tipo deverão ser adquiridos, por forma a maximizar o lucro total anual.

   Apresente um modelo de programação linear que caracterize este problema.

3. Suponha que recebeu uma herança de 30 mil euros e que pretende investir este dinheiro na totalidade ou apenas em parte. Sabendo disto, dois amigos seus, Alberto e Belmiro, ofereceram-lhe sociedade em dois negócios diferentes que pretendem realizar no próximo verão. Em ambos os casos a sua participação envolve investimento em dinheiro e colaboração com trabalho.

   Tornar-se sócio a parte inteira do Alberto implica um investimento de 25 mil euros e 400 horas de trabalho e o lucro esperado é de 22 mil euros (sem levar em conta o valor do seu tempo). Os valores correspondentes à participação (a parte inteira) no negócio do Belmiro são 20 mil euros, 500 horas de trabalho e 22 mil euros para o lucro esperado.

   Contudo ambos os amigos são flexíveis e permitem-lhe participar com qualquer fracção da parte inteira de sócio, sendo obviamente a sua parte nos lucros proporcional a esta fracção.

   Dado que pretende algum tempo livre no verão, não quer dedicar mais de 600 horas de trabalho. Apresente um programa linear que lhe permita decidir qual a combinação de participação num ou em ambos os projectos dos seus amigos de modo a maximizar o seu lucro.

4. Uma empresa produz dois tipos de fertilizantes, fosfato-Hi e fosfato-Li. Para as suas produções são usados três materiais de base, tal como se indica no quadro:

	Toneladas de material requeridas para a produção de uma tonelada		Quantidade máxima de material disponível por mês (em toneladas)
Material	Fosfato-Hi	Fosfato-Li	
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	3	1800
Preço de venda por tonelada de fertilizante (em euros)	75	50	

A capacidade produtiva desta empresa é de 500 toneladas de fosfato-Hi, ou 600 toneladas de fosfato-Li, ou qualquer "combinação apropriada" destes dois fertilizantes.

Sabe-se que não há dificuldade quanto à colocação no mercado de fosfato-Hi, enquanto que para o fosfato-Li não se pode ultrapassar a cota de mercado fixada em 500 toneladas por mês.

Formule o problema em termos de programação linear.

5. Uma empresa tem 150 milhões de euros para distribuir pelas suas três subsidiárias, para o próximo ano. Devido a compromissos de estabilidade de emprego dos seu funcionários, e por outros motivos, a empresa estabeleceu níveis mínimos no orçamento a atribuir a cada subsidiária de 15, 25 e 40 milhões de euros, respectivamente. Devido ao modo como opera, a segunda subsidiária não consegue utilizar mais do que 85 milhões de euros sem expansão com novo capital. Nesta altura, a empresa não está disposta a assumir tal expansão. Cada subsidiária pode tomar conta de vários projectos com os fundos que recebe. Foi estabelecida uma taxa de retorno (como percentagem do investimento) para cada projecto. Além disso, existem projectos que obrigam a valores de investimento limitados. A empresa pretende maximizar os lucros envolvidos na totalidade dos investimentos efectuados. Os dados referentes a cada projecto são definidos na seguinte tabela

SUBSIDIÁRIA	PROJECTO	TAXA DE RETORNO	LIMITE MÁXIMO NO VALOR DO INVESTIMENTO
1	1	8%	30 milhões de euros
	2	6%	25 milhões de euros
	3	7%	45 milhões de euros
2	4	5%	35 milhões de euros
	5	8%	50 milhões de euros
	6	9%	20 milhões de euros
3	7	10%	30 milhões de euros
	8	6%	15 milhões de euros

Formule o problema como um programa linear.

6. Uma empresa transformadora manipula aço para produzir quatro tamanhos de vigas em I: pequenas, médias, largas e extra largas. As vigas podem ser produzidas em qualquer uma de três máquinas: A, B ou C. O tamanho das vigas que cada máquina consegue produzir por hora está expresso no seguinte quadro (em metros)

Viga\Máquina	A	B	C
Pequena	300	600	800
Média	250	400	700
Larga	200	350	600
Extra larga	100	200	300

Considere que cada máquina trabalha até 50 horas por semana e que os custos por hora de funcionamento das máquinas é de 15 euros, 25 euros e 40 euros, respectivamente. Além disso são encomendadas 10 000, 8 000, 6 000 e 6 000 metros de cada tipo de viga por semana, respectivamente. Formule o problema de escalonamento das máquinas como um programa linear.

7. Uma determinada empresa pretende estabelecer um plano de produção para as quatro estações do próximo ano. A capacidade de produção e encomendas esperadas estão expressas na seguinte tabela

	Primavera	Verão	Outono	Inverno
Encomendas	250	100	400	500
Capacidade normal	200	300	350	—
Capacidade extraordinária	100	50	100	150

Os custos de produção normal são de 3,5 cêntimos por unidade, mas os custos da produção extraordinária variam sazonalmente, sendo de 4 cêntimos na Primavera e no Outono, de 4,5 cêntimos no Verão e de 5 cêntimos no Inverno. A empresa possui 200 unidades em stock, no início da Primavera, não desejando terminar o Inverno com stock, já que pretende retirar o produto da linha no final do Inverno. As unidades produzidas em produção normal não são colocadas no mercado na estação corrente, ficando a aguardar a estação seguinte. Por outro lado, as unidades produzidas extraordinariamente podem ser colocadas no mercado na mesma estação em que são produzidas. Pretende-se determinar um plano de produção que satisfaça as encomendas e que minimize o custo total envolvido no processo.

8. Uma empresa pretende estabelecer um plano para a produção de 2 artigos com encomendas sazonais sobre um período de 12 meses. As encomendas mensais do primeiro artigo são de 100 000 unidades nos meses de Outubro, Novembro e Dezembro, 10 000 unidades durante os meses de Janeiro, Fevereiro, Março e Abril e 30 000 unidades nos restantes meses do ano. As encomendas referentes ao segundo artigo são de 50 000 unidades durante os meses de Outubro a Fevereiro e de 15 000 durante os restantes meses. O custo unitário para produzir os artigos 1 e 2 é de 2,5 euros e 4 euros, respectivamente, no caso de serem fabricados até Junho, inclusive. Após Junho, os custos unitários são reduzidos para 2,25 euros e 3,5 euros, devido à instalação de uma máquina mais sofisticada. O número total de unidades dos artigos 1 e 2 produzidos mensalmente não pode exceder as 120 000 unidades nos meses de Janeiro a Setembro e as 150 000 unidades nos meses de Outubro a Dezembro. Além disso, cada unidade dos artigos 1 e 2 ocupam respectivamente, 2 e 4 metros cúbicos em armazém. Suponha que o armazém está limitado a uma capacidade total de armazenagem de 150 000 metros cúbicos e que o custo mensal de armazenagem é de 5 cêntimos por metro cúbico. Formule o problema de escalonamento da produção de forma a que o custo total de produção e o custo de armazenagem sejam minimizados.

9. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & x_1 - x_3 \\ \text{Sujeito a} & \;\; x_1 - 2x_2 \qquad \geq 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Determine a sua forma normal.

(b) Mostre que a sua solução básica de variáveis básicas x_3 e x_4 é primal não admissível.

(c) Determine a solução óptima do programa usando o método simplex e iniciando o processo com a solução básica referida em (b).

10. Determine o dual do seguinte programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & 3x_1 + 2x_2 - x_4 \\ \text{Sujeito a} & \;\; x_1 \qquad + 3x_3 + \;\; x_4 \geq 2 \\ & \qquad 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 \leq 2 \\ & -x_1 \qquad - 8x_3 + 2x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

11. Considere o seguinte programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

(a) Determine graficamente a sua solução óptima.

(b) Mostre que a solução obtida em (a) é primal e dual admissível.

(c) Determine a solução óptima do seu dual usando o teorema da complementaridade das variáveis de desvio.

12. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & a^T x \leq b \\ & 0 \leq x \leq d \end{array}$$

com $a, c, d \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^1$ dados.

(a) Mostre que o conjunto admissível do programa dado é convexo.

(b) Mostre que x é solução óptima desse programa se e só se existem $y \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$c + ya = u - v$$

$$a^T x \leq b$$

$$0 \leq x \leq d$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$y(a^T x - b) = 0$$

$$x^T u = v^T (d - x) = 0$$

(c) Determine a solução óptima do programa linear relaxado do problema da mochila

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 5/2 \\ & x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

13. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & x_1 + x_3 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Determine a sua forma normal.

(b) Verifique se a solução básica associada ao conjunto $J = \{1, 4\}$ é primal admissível.

(c) Determine a solução óptima do programa linear usando o método simplex e começando com a solução básica referida em (b).

14. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } w = & -1 + x_1 - x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Determine a sua solução óptima usando o método simplex.

(b) Verifique se a solução óptima é única e em caso negativo determine uma outra solução básica óptima.

(c) Verifique se a solução óptima é degenerada e em caso afirmativo determine todas as matrizes básicas a si associadas.

15. (a) Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

com A uma matriz de ordem $m \times n$ de característica $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que o programa é ilimitado se e só se é admissível e se existe um vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = 0$, $u \geq 0$, $c^T u < 0$.

(b) Mostre que o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{array}$$

é ilimitado.

16. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{array}$$

(a) Determine a sua forma normal.

(b) Mostre que a solução admissível com $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ é básica.

(c) Determine a sua solução óptima usando o método simplex e iniciando o processo com a solução básica referida em (b).

(d) Mostre que $x_1 \leq 1$ em qualquer solução admissível do programa linear.

17. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & Ex \geq d \end{array}$$

com A e E matrizes de ordens $m \times n$ e $p \times n$ respectivamente, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^p$ e $c, x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que o conjunto admissível do programa linear é convexo.

(b) Mostre que o programa linear é admissível se e só se o sistema

$$A^T u + E^T v = 0, \quad v \geq 0, \quad b^T u + d^T v > 0.$$

não tem solução.

18. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{Sujeito a} & x_1 \qquad\quad + 2x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad\; = 2 \\ & x_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

(a) Verifique se a solução do conjunto de restrições com $x_2 = x_4 = 0$ é básica.

(b) Mostre que a solução do conjunto de restrições com $x_1 = x_3 = 0$ é básica admissível.

(c) Determine a solução óptima do programa usando o método simplex e iniciando o processo com a solução básica admissível referida na alínea anterior.

19. Demonstre o Lema de Farkas: "$Ax = b$, $x \geq 0$ tem solução se e só se $A^T u \leq 0$, $b^T u > 0$ não tem solução".

20. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$ é um vector não nulo tal que o sistema $A^T u = c$ é impossível. Mostre que toda a solução óptima $\overline{x}$ do programa linear tem de ter pelo menos uma componente nula.

21. Resolva o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 6x_1 + x_2 + 12x_3 \\ \text{Sujeito a} & 3x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

sem usar o método simplex.

22. Considere o programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \sum_{j=1}^{n} c_j\,|x_j| \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \end{array}$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se c_j é positivo para todo $j = 1, 2, \ldots, n$ então este programa é equivalente a um programa linear.

23. Mostre que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se e só se para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \in X$$

24. Demonstre o Lema de Gordon: "$Ax > 0$ tem solução se e só se $A^T y = 0$, $y \geq 0$, $y \neq 0$ não tem solução".

25. Considere o programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\} \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

com $b \in \mathbb{R}^m$, A uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, $x \in \mathbb{R}^n$, α, $\beta \in \mathbb{R}^1$. Mostre que esse programa é equivalente a um programa linear.

26. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - 4x_2 \qquad + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad = 3 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

   (a) Mostre que a solução básica com variáveis básicas x_3 e x_4 é dual admissível.

   (b) Determine a solução óptima do programa linear usando o método dual simplex com a solução inicial da alínea anterior.

27. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{Sujeito a} & 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3 \end{array}$$

   (a) Mostre que a solução básica com variáveis básicas x_1 e x_2 é óptima para o programa dado.

   (b) Verifique se a solução básica definida na alínea anterior é a única solução óptima do programa dado e em caso negativo determine uma outra solução óptima.

28. Determine a solução óptima do programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & -x_1 + 2x_2 - 5x_4 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad = 4 \\ & x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

usando o método dual simplex.

29. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a} & \;\; x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{array}$$

(a) Mostre que a solução básica de variáveis básicas x_2 e x_3 é a única solução óptima do programa linear.

(b) Mostre que o dual desse programa tem uma única solução óptima e determine-a.

30. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & 3x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a} & \;\; x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 \qquad \leq 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{array}$$

(a) Determine uma solução básica dual admissível.

(b) Mostre que o programa é não admissível usando dois algoritmos à sua escolha.

31. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & -x_1 + x_3 \\ \text{Sujeito a} & \;\; x_1 - 2x_2 \qquad \geq 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{array}$$

(a) Mostre que a solução básica definida por $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ é óptima para esse programa.

(b) Verifique se a solução definida na alínea anterior é a única solução óptima e em caso negativo determine uma outra solução óptima.

(c) Determine as matrizes bases e as correspondentes decomposições LU associadas à solução óptima definida na alínea (a).

(d) Verifique se o dual do programa dado tem solução óptima única e em caso negativo determine uma outra solução óptima.

32. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - x_2 - 2x_4 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \qquad + 2x_4 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ -1 \leq x_2 \leq 3,\ x_3 \leq 0,\ 1 \leq x_4 \leq 5 \end{array}$$

Verifique se a solução $\overline{x} = (0, 1, 0, 3)^T$ é óptima para esse programa.

33. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & x_1 - x_2 - 5x_4 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ & -x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = 2 \\ & 1 \leq x_1 \leq 3,\ -1 \leq x_2 \leq 0,\ x_4 \leq -2 \end{array}$$

Verifique se a solução básica associada à partição

$$J = \{1, 3\}, \quad L = \{2\}, \quad U = \{4\}$$

é primal ou dual admissível.

34. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeito a} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 - x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 1 \\ & 0 \le x_1 \le 1,\ 2 \le x_2 \le 5,\ -3 \le x_3 \le -2,\ 1 \le x_4 \le 3 \end{array}$$

(a) Mostre que a solução básica associada à partição $J = \{1, 3\},\ L = \{2\}$ e $U = \{4\}$ não é primal admissível e construa o programa linear da Fase 1.

(b) Determine uma solução básica dual admissível para esse programa linear.

35. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & l_j \le x_j \le u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

onde $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$ e l_j e u_j são números reais.

(a) Mostre que x é solução óptima do programa linear se e só se existem vectores $y \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ c - A^T y = w - v \\ w \ge 0, \quad v \ge 0 \\ \left.\begin{array}{l} w_j(x_j - l_j) = 0 \\ v_j(u_j - x_j) = 0 \\ l_j \le x_j \le u_j \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

(b) Mostre que x é solução óptima do programa linear se e só se existem vectores $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{array}{l} z = c - A^T y \\ Ax = b \\ \left.\begin{array}{l} x_j = l_j \Rightarrow z_j \ge 0 \\ l_j < x_j < u_j \Rightarrow z_j = 0 \\ x_j = u_j \Rightarrow z_j \le 0 \\ l_j \le x_j \le u_j \end{array}\right\} j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

36. Considere o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & l_j \le x_j \le u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

com $-\infty < l_j < u_j < +\infty$, A uma matriz de ordem $m \times n$ com característica $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$. Seja $\overline{x}$ uma solução básica admissível não degenerada associada a uma partição $\{J, L, U\}$ com J o conjunto das variáveis básicas e L, U os conjuntos das variáveis não básicas fixas nos limites inferiores e superiores respectivamente.

(a) Mostre que se $\overline{x}$ é a solução óptima do primal, então o dual tem uma e uma só solução óptima π que satisfaz $B^T \pi = c_J$.

(b) Mostre que $\overline{x}$ é a única solução óptima do primal se e só se a única solução óptima do dual π é não degenerada.

37. Considere o programa linear

$$PL(b_i) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Sejam $z(b_i)$ o seu valor óptimo e $z(\tilde{b}_i)$ o valor óptimo do programa modificado

$$PL(\tilde{b}_i) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = \tilde{b} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde $\tilde{b}_j = b_j$, para todo $j \neq i$. Mostre que $z(b_i)$ é uma função convexa linear por troços.

38. Considere o programa linear na forma normal com limites

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz de característica $m = n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $-\infty \leq l_j < u_j < +\infty$. Apresente os passos dos métodos primal e dual simplex para a resolução desse programa linear.

39. Uma fábrica de mobiliário produz quatro tipos de móveis em três secções, polimento, montagem e corte. A actual capacidade dessas secções é de 400, 900 e 800 horas-máquina, respectivamente. Tendo como objectivo a maximização do lucro, a formulação do problema conduziu ao seguinte programa linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize } z = & 170x_1 + 210x_2 + 310x_3 + 80x_4 \\ \text{Sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + \ \ 4x_3 + \ \ x_4 \leq 400 \\ & 5x_1 + 4x_2 + \ \ 8x_3 + 2x_4 \leq 900 \\ & 3x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 \leq 900 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

onde x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ representa a quantidade de móveis do tipo i a produzir. Na resolução do problema obteve-se a solução óptima $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (100, 0, 0, 200)$ com $z = 33000$.

(a) Determine os intervalos de sensibilidade para as margens unitárias de cada produto.

(b) Determine os intervalos de sensibilidade para as capacidades das três secções.

(c) Determine as implicações na solução óptima de um aumento de 30 horas-máquina na secção de polimento.

(d) Determine o novo plano de fabrico associado a um lucro unitário adicional de 18 u.m. no produto 3.

(e) Estude o comportamento do plano óptimo quando o lucro unitário do produto 2 varia entre 200 e 255.

(f) Indique como se comporta a solução óptima quando a capacidade do primeiro recurso varia entre 350 e 425 horas-máquina.

(g) Calcule o lucro mínimo que o mobiliário de tipo 1 pode dar sem alterar o actual plano de fabrico.

(h) A direcção da empresa encara a hipótese de produção de um novo móvel. Analise o comportamento da solução óptima, sabendo que este produto necessita de 1 hora-máquina na secção de polimento, 2 horas-máquina na secção montagem e de 3 horas-máquina na secção de corte e possibilita um lucro de 82 u.m..

(i) Encara-se a hipótese de o mobiliário passar a ser também envernizado de acordo com os seguintes consumos específicos:

tipo 1: 5 H-H; tipo 2: 6 H-H; tipo 3: 5 H-H; tipo 4: 2 H-H.

Supondo que as disponibilidades desta secção são de 850 H-H, determine o novo plano de fabrico.

40. A empresa KAPA, Lda. fabrica dois produtos, 1 e 2, não tendo problemas com a venda da totalidade da produção. Cada unidade do produto 1 necessita de 2 H-H do departamento A e 1 H-M do departamento B, enquanto que cada unidade do produto 2 necessita de 2 H-H do departamento A e 2 H-M do departamento B. As disponibilidades dos dois departamentos são de 160 H-H e 120 H-M, respectivamente. Por outro lado, cada unidade do produto 1 necessita de 4 unidades de matéria prima e cada unidade do produto 2 de 2 unidades desse recurso, sendo de 280 unidades as suas disponibilidades. As margens unitárias para os produtos 1 e 2 são 10 e 15 u.m., respectivamente.

    A Direcção de Produção serviu-se de um modelo de programação linear e obteve como solução óptima a produção de 40 unidades do primeiro produto e 40 do segundo.

    (a) Até quanto pode aumentar a capacidade produtiva do departamento B sem que o seu preço sombra se altere?

    (b) Suponha que há possibilidade de recorrer a um turno extraordinário, com acréscimo de 40 H-H no dep. A e 30 H-M no dep. B, a que corresponde um acréscimo de custos de 120 u.m.. Acha que é de recomendar o recurso ao turno extraordinário? Em caso afirmativo indique o novo plano de produção.

    (c) O Departamento de Investigação e Desenvolvimento após ter realizado os estudos respectivos, propôs alterações no produto 2. De acordo com essa proposta o produto 2 passará a necessitar de apenas 1 H-H do dep. A e 1.5 H-M do dep. B, mantendo-se o consumo unitário de matérias primas. Analise as implicações da proposta.

    (d) O Departamento de Marketing sugere a introdução de um novo produto que necessita de 1 H-H do dep. A, 3 H-M do dep. B e 3 unidades de matéria prima, por unidade produzida, possibilitando uma margem unitária de 20 u.m.. Analise igualmente as implicações desta sugestão. Caso seja recomendável e perante a imposição de aceitação de apenas uma das propostas – do Dep. de I & D ou do Dep. de Marketing – indique por qual delas optaria.

    (e) Analise separadamente o comportamento da solução óptima perante a variação das disponibilidades de matéria prima entre 200 e 400 unidades e da margem do produto 2 entre 5 e 20 u.m..

Referências

[Bazaraa et al., 1990] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. F. (1990). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, New York.

[Bradley et al., 1977] Bradley, S., Hax, A., and Magnanti, T. L. (1977). *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading.

[Chv́atal, 1983] Chv́atal, V. (1983). *Linear Programming*. W.H. Freeman & Company, New York.

[Gill et al., 1991] Gill, P., Murray, E., and Wright, M. (1991). *Numerical Linear Algebra and Optimization*, volume 1. Addison-Wesley, Reading.

[Golub and Loan, 1996] Golub, G. H. and Loan, C. F. V. (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[Hillier and Lieberman, 1989] Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (1989). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, New York.

[Júdice and Patrício, 1994] Júdice, J. and Patrício, J. (1994). *Sistemas de Equações Lineares*. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra.

[Murty, 1995] Murty, K. G. (1995). *Linear Programming*. Prentice Hall, New York.

[Nash and Sofer, 1996] Nash, S. G. and Sofer, A. (1996). *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, New York.

[Ramalhete et al., 1998] Ramalhete, M., Guerreiro, J., and Magalhães, A. (1998). *Programação linear*. McGraw-Hill, Lisboa.

[Tavares et al., 1996] Tavares, L. V., Oliveira, R., Themido, J. H., and Correia, F. N. (1996). *Investigação operacional*. McGraw-Hill, Lisboa.

[Wright, 1997] Wright, S. J. (1997). *Primal-dual interior-point methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.