

Joaquim J. Júdice

Pedro C. Martins

Marta B. Pascoal

Jorge P. Santos

OPTIMIZAÇÃO EM REDES

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

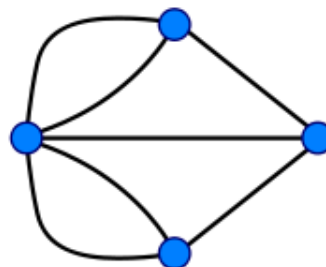
2006

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Alguns Problemas de Optimização em Redes	2
3	Noções da Teoria de Grafos	9
4	Árvore Geradora de Custo Mínimo	14
5	Problema do Fluxo de Custo Mínimo: Definição e Propriedades	15
6	Método Simplex para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo	22
7	Problema de Transportes	25
8	Fase I do Método Simplex para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo	29
9	Método M-Grande	35
10	Tratamento de Desigualdades	37
11	Problemas Não Equilibrados	38
12	Problemas de Fluxo com Limites Inferiores e Superiores (Capacidades)	39
13	Método Simplex para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo com Limites	42
14	Determinação de uma Solução Básica Admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo com Limites	44
15	Formulação do Problema do Caminho Mais Curto como Problema de Fluxo de Custo Mínimo	50
16	Resolução do Problema do Caminho Mais Curto	51
17	Problema do Fluxo Máximo	55
18	Resolução do Problema do Fluxo Máximo	56
19	Problema de Afectação	62
20	Método Simplex para o Problema de Afectação	63
21	Método Húngaro para o Problema de Afectação	65
22	Problemas de Afectação Não Equilibrados	70
23	Optimização Não Linear em Redes	72
24	Problema de Fluxo Multicomodidade de Custo Mínimo	80
25	Decomposição com Geração de Colunas	82
26	Resolução do Problema de Fluxo Multicomodidade de Custo Mínimo	92
27	Problemas de Planeamento - Método do Caminho Crítico	97
	Exercícios	100
	Bibliografia	115

1 Introdução

As redes têm subjacente uma estrutura de grafo, definido por um conjunto de nós e de ligações entre eles, à qual se associam valores numéricos. Estas estruturas aparecem sob as mais variadas formas no nosso dia-a-dia. Em alguns contextos o grafo é facilmente identificável, como em redes de transportes ou de comunicações, enquanto que noutros a sua presença não é tão óbvia, como por exemplo em redes de ligações sociais ou de planeamento estratégico. Um dos problemas clássicos de grafos surgiu na cidade Königsberg, actualmente Kaliningrado. Esta localidade é banhada pelo rio Pregel, no meio do qual se situa uma ilha ligada ao resto da localidade por sete pontes. Os habitantes da cidade afirmavam que não era possível efectuar um percurso que passasse por todas as pontes uma única vez. Em 1736 Euler resolveu este problema interpretando cada zona como um nó de um grafo, e cada ponte como um arco de ligação entre duas margens. As figuras mostram um mapa da Königsberg, contemporânea de Euler, e o grafo que lhe serviu de modelo.



O objectivo fundamental dos problemas de optimização em redes é determinar uma solução, que representa uma entidade numa rede, como por exemplo uma distribuição de fluxo ou um caminho, associada a um valor óptimo de uma determinada função objectivo.

A optimização em redes utiliza técnicas de optimização, linear e não-linear, adaptadas à estrutura associada à rede, que permitem a resolução de problemas de dimensão elevada de forma extremamente eficiente, podendo por isso ser utilizadas em inúmeras aplicações. Por outro lado, muitos dos problemas de programação linear formulados em redes têm soluções com valores inteiros, sendo por isso muito mais simples de resolver do que os usuais problemas de programação inteira. Finalmente, os modelos em redes ocorrem nos mais variados contextos e são muito intuitivos e de fácil apreensão.

O primeiro trabalho a relacionar soluções básicas de programação linear em problemas de transportes e árvores em grafos apareceu em 1949, devido a Koopmans e permitiu a aplicação do método simplex a problemas de fluxo em redes. Por esta razão este texto começa por apresentar a aplicação deste método ao problema do fluxo de custo mínimo. Seguidamente são apresentadas reduções de outros problemas de optimização em redes como problemas deste tipo. Em particular, serão tratados os problemas de transporte, afectação, caminho mais curto e fluxo máximo. Para esses problemas são também descritas técnicas especialmente vocacionadas para as suas resoluções. Após análise de alguns dos mais relevantes problemas lineares de optimização em redes é ainda feita referência a problemas de fluxo de custo mínimo de maior complexidade, tais como problemas de fluxo multicomodidade de custo mínimo e problemas de optimização em redes envolvendo uma função objectivo não linear.

Neste trabalho tentou-se privilegiar a relação entre a programação linear e a optimização em redes, analisando-se paralelamente questões mais específicas das redes. Houve a preocupação em combinar a simplicidade e o rigor

na exposição e de incluir uma grande variedade de exemplos de ilustração, de forma a que este texto possa ser usado como manual didáctico num curso de optimização em redes. O livro inclui ainda vários exercícios sobre os assuntos abordados e uma bibliografia, que se poderá tornar um bom auxílio para leituras posteriores sobre a optimização em redes.

2 Alguns Problemas de Optimização em Redes

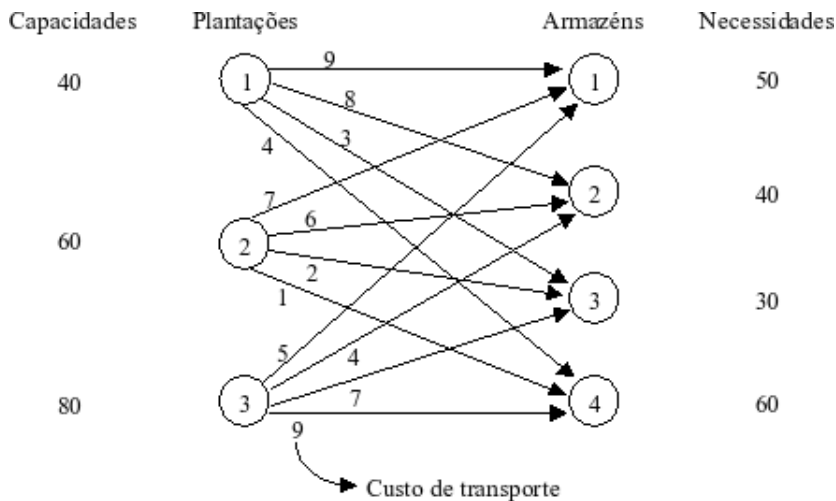
1. PROBLEMA DE TRANSPORTE

A companhia Brasileira de Café transforma café em grão em café em pó, em 3 plantações bem localizadas. O café é posteriormente embarcado todas as semanas com destino a 4 armazéns em diferentes cidades, para retalho, distribuição e exportação. O custo de transporte, em unidades monetárias (u.m.), de uma tonelada de café da plantação i para o armazém j é dado pela seguinte tabela.

Plantações\Armazéns	1	2	3	4
1	9	8	3	4
2	7	6	2	1
3	5	4	7	9

As capacidades semanais das plantações 1, 2 e 3 são 40, 60 e 80 toneladas, respectivamente, enquanto que as necessidades dos armazéns 1, 2, 3 e 4 são 50, 40, 30 e 60 toneladas, respectivamente. O objectivo da companhia consiste em determinar as quantidades de café que devem ser transportadas de cada uma das plantações para cada um dos armazéns, de forma a minimizar o custo total de transporte.

Formulação. O problema pode ser representado pela seguinte rede



Na descrição matemática deste problema, as variáveis principais são definidas por x_{ij} , que representa o número de toneladas de café que irá ser transportado semanalmente da plantação i ($i = 1, 2, 3$) para o armazém j ($j = 1, 2, 3, 4$). É de notar que a capacidade total das três plantações é igual ao requerimento total dos quatro armazéns. Deste modo, para que sejam satisfeitas integralmente as necessidades dos armazéns, as plantações terão de ser utilizadas na sua capacidade máxima.

Na definição deste problema, a soma das quantidades de café a enviar de cada plantação i ($i = 1, 2, 3$) tem

de ser igual à quantidade disponível nessa plantação, ou seja,

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 40 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 60 \\x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 80\end{aligned}$$

Se representarmos por a_i ($i = 1, 2, 3$) a quantidade disponível de café na plantação i , este conjunto de restrições pode ser escrito de uma forma equivalente

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Além disso, a soma das quantidades de café que chegam ao armazém j ($j = 1, 2, 3, 4$) deve ser igual à procura desse armazém, e portanto

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 50 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 40 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 30 \\x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 60\end{aligned}$$

Se representarmos por b_j ($j = 1, 2, 3, 4$) o número de toneladas de café que o armazém j necessita, este conjunto de restrições é equivalente a

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

As quantidades a transportar devem ser, naturalmente, não negativas, isto é

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

O custo total do transporte é igual à soma dos custos associados a cada percurso e por isso é definido por

$$z = 9x_{11} + 8x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 7x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + x_{24} + 5x_{31} + 4x_{32} + 7x_{33} + 9x_{34}$$

Se representarmos por c_{ij} o custo de transportar uma tonelada de café da plantação i para o armazém j , o custo de transportar x_{ij} toneladas de café da plantação i para o armazém j é $c_{ij}x_{ij}$ e o custo total do transporte é dado por

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij}x_{ij}$$

Tendo em conta as restrições do problema, obtém-se o seguinte programa linear

$$\begin{aligned}\text{Minimize } z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \text{Sujeito a } &\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n\end{aligned}$$

onde m representa o número de plantações e n o número de armazéns. Qualquer problema com esta formulação é designado por *Problema de Transporte*, mesmo que não esteja em questão o transporte de mercadorias entre várias entidades.

2. PROBLEMA DE AFECTAÇÃO

Uma Companhia de Seguros deseja construir (ou adaptar) cinco áreas de representação na área da cidade de Lisboa. No passado a Companhia utilizou os serviços de cinco empresas construtoras diferentes e, tendo ficado satisfeita com todas, convidou-as a orçamentar cada um dos serviços. As propostas finais (em milhões de euros) são indicadas na seguinte tabela

	Companhias Construtoras				
	1	2	3	4	5
Área 1	85.3	88	87.5	82.4	89.1
Área 2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3
Área 3	82	81.3	82.4	80.6	83.5
Área 4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4
Área 5	86.7	78.3	81.7	85.5	85.5

Como a Companhia Seguradora tem urgência na construção das referidas áreas, adjudicará no máximo uma obra a cada uma das companhias construtoras. O objectivo do problema é a determinação da afectação da área de construção às construtoras, de forma a que o custo total envolvido seja mínimo.

Formulação. Definam-se as seguintes variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a área } i \text{ for construída pela construtora } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

O problema obriga que cada área seja construída por uma única construtora, o que é traduzido pelas seguintes restrições que afectam uma construtora a uma área de construção

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \end{aligned}$$

Como as variáveis só podem tomar dois valores, zero ou um, então em cada uma das restrições apenas uma das variáveis toma o valor um e as restantes o valor zero. Desta forma cada uma das restrições garante que cada área seja adjudicada a uma e uma só construtora. O conjunto de restrições que acabamos de estabelecer pode ser escrito na forma equivalente

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 5.$$

Por outro lado, cada construtora irá construir uma e uma só área de representação e por isso

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1 \end{aligned}$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 5.$$

O objectivo do problema é minimizar o custo total da afectação, isto é

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = & 85.3x_{11} + 88.0x_{12} + 87.5x_{13} + 82.4x_{14} + 89.1x_{15} + \\ & 78.9x_{21} + 77.4x_{22} + 77.4x_{23} + 76.5x_{24} + 79.3x_{25} + \\ & 82.0x_{31} + 81.3x_{32} + 82.4x_{33} + 80.6x_{34} + 83.5x_{35} + \\ & 84.3x_{41} + 84.6x_{42} + 86.2x_{43} + 83.3x_{44} + 84.4x_{45} + \\ & 86.7x_{51} + 78.3x_{52} + 81.7x_{53} + 85.5x_{54} + 85.5x_{55} \end{aligned}$$

Se c_{ij} representar o custo de construção da área i pela construtora j , então o problema pode ser formulado como um problema de programação binária

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

onde n representa o número de áreas de representação a construir e que é igual ao número de companhias construtoras. Um programa com esta estrutura é denominado *Problema de Afectação*. Como veremos mais adiante, as propriedades da programação linear permitem resolver este problema a partir de um programa linear obtido do anterior por substituição dos requerimentos binários $x_{ij} \in \{0, 1\}$ por $x_{ij} \geq 0$.

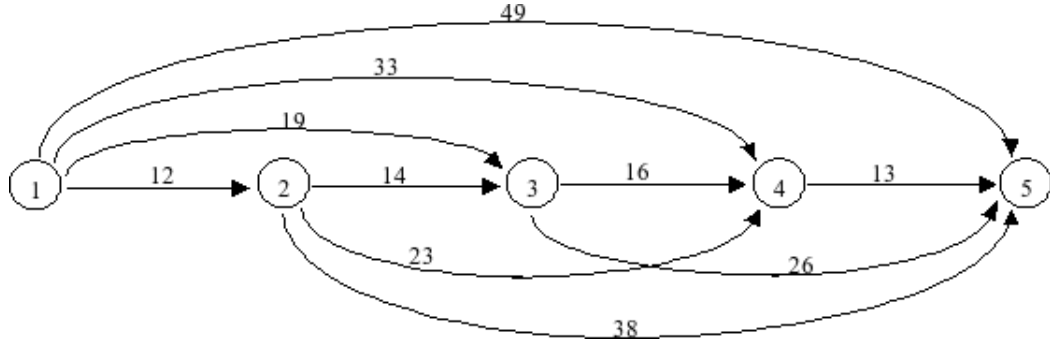
3. PROBLEMA DO CAMINHO MAIS CURTO

Uma empresa industrial ganhou um contrato para produzir embalagens. O contrato é de 4 anos e não se espera que seja renovado. O processo de produção requer uma máquina especializada que a empresa não possui. A empresa pode comprar a máquina, efectuar a respectiva manutenção durante os 4 anos do contrato e posteriormente vendê-la como sucata ou substituí-la no final de um determinado ano por um modelo novo. Os novos modelos requerem menores custos de manutenção do que os antigos. O custo líquido estimado para a operação de compra (preço de compra da máquina, mais manutenção menos valor de revenda) de uma máquina no início do ano i e de a dar como pagamento parcial no início do ano j está estabelecido na seguinte tabela, expressa em milhares de euros

$j \setminus i$	1	2	3	4	5
1	—	12	19	33	49
2	—	—	14	23	38
3	—	—	—	16	26
4	—	—	—	—	13

Pretende-se estabelecer um plano de aquisição, manutenção e revenda da máquina, de forma a que o custo total envolvido nessa operação seja o menor possível, dentro do período de tempo estabelecido.

Formulação. Este problema pode ser descrito através de um grafo e modelado como um problema do caminho mais curto (ou de custo mínimo) sobre uma rede orientada. Para isso, consideram-se os nodos 1, 2, 3 e 4 como representantes do início do primeiro ao quarto anos, respectivamente e o nodo 5 como o início do quinto ano, isto é, o final do contrato. Um arco orientado de i para j (designado por (i, j)) representa a aquisição de uma máquina no início do ano i e a sua troca ou venda como sucata no início do ano j . O custo associado a cada arco representa o custo líquido da operação.



Para a modelação deste problema, comecemos por definir os conjuntos de nós N e de arcos A do grafo por

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

e consideremos as seguintes variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a máquina é usada desde o nó } i \text{ até ao nó } j \text{ (se } (i, j) \text{ faz parte do caminho)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (i, j) \in A$$

No ano 1 é necessário adquirir uma e uma só máquina que poderá ser usada até um dos anos posteriores. Assim, no grafo apenas um dos arcos que sai do nó 1 irá fazer parte do caminho mais curto. Esta restrição é representada matematicamente por

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \Leftrightarrow \sum_{j:(1,j) \in A} x_{1j} - \sum_{j:(j,1) \in A} x_{j1} = 1$$

Além disso, em cada um dos anos intermédios ($i = 2, 3, 4$), o número de máquinas que são adquiridas deve ser igual ao número daquelas que cessam de funcionar. Portanto, em cada nó intermédio ($i = 2, 3, 4$) do caminho, o número de arcos que saem é igual ao número de arcos que entram. Assim verificam-se as seguintes restrições

$$\begin{aligned} x_{23} + x_{24} + x_{25} - x_{12} &= 0 \\ x_{34} + x_{35} - x_{13} - x_{23} &= 0 \Leftrightarrow \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = 0, \quad i = 2, 3, 4 \\ x_{45} - x_{14} - x_{24} - x_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente no último ano deverá haver uma máquina a operar. Ou seja, no caminho existe apenas um arco que chega ao nó final 5, o que se traduz pelo seguinte requerimento

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \Leftrightarrow \sum_{j:(5,j) \in A} x_{5j} - \sum_{j:(j,5) \in A} x_{j5} = -1$$

Se c_{ij} é o custo associado à operação caracterizada pelo arco (i, j) (expresso na tabela de custos) e tendo em conta as restrições referidas, podemos escrever o problema na forma de um programa binário

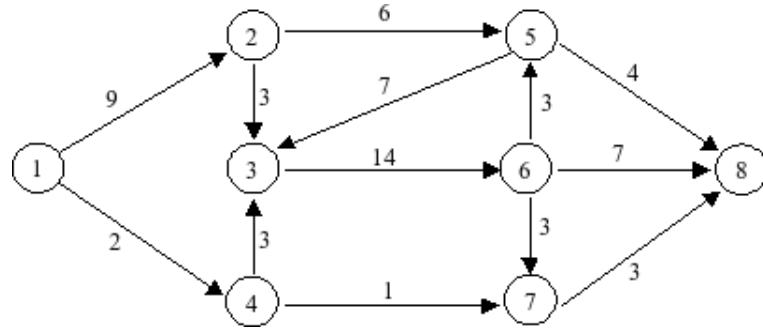
$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \in N - \{s, t\} \\ -1 & \text{se } i = t \end{cases} \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

onde s representa o nó inicial e t o nó terminal, ou seja $s = 1$ e $t = 5$. Da descrição deste problema, facilmente se conclui que esta formulação representa a determinação do caminho entre o nó s e o nó t de menor custo. Por

essa razão este modelo é um exemplo do chamado *Problema do Caminho Mais Curto*. Tal como no exemplo anterior, as restrições de integralidade $x_{ij} = 0$ ou 1 podem ser substituídas por $0 \leq x_{ij} \leq 1$, obtendo-se assim um programa linear.

4. PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO

Uma empresa petrolífera pretende determinar a quantidade máxima de petróleo que pode ser enviada da estação 1 para a estação 8 através da seguinte rede com estações intermédias 2, 3, 4, 5, 6 e 7.



Os vários arcos da rede representam os oleodutos com diferentes diâmetros, sendo por isso diferente o número de barris de petróleo que podem ser bombeados através de cada um destes arcos. Os valores associados a cada arco representam as capacidades dos oleodutos medidas em milhões de barris por hora.

Formulação. Para formularmos o problema, começamos por definir os conjuntos de nós N e de arcos A da rede

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 7), (5, 3), (5, 8), (6, 5), (6, 7), (6, 8), (7, 8)\}$$

A seguir consideramos as variáveis x_{ij} ($(i, j) \in A$), representando o número de barris de petróleo (em milhões) que atravessam por hora o arco (i, j) e f , que corresponde ao número de barris de petróleo (em milhões) a enviar por hora da estação 1 para a estação 8.

O número de barris de petróleo que saem por hora da estação 1 é igual a f , isto é, tem-se

$$x_{12} + x_{14} = f \Leftrightarrow \sum_{j:(1,j) \in A} x_{1j} - \sum_{j:(j,1) \in A} x_{j1} = f$$

Além disso, a quantidade de petróleo que é bombeada para cada estação intermédia i ($i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$) é igual à quantidade que vai ser bombeada a partir de i . Assim, se obtêm as seguintes restrições

$$\begin{aligned} x_{23} + x_{25} - x_{12} &= 0 \\ x_{36} - x_{23} - x_{43} - x_{53} &= 0 \\ x_{43} + x_{47} - x_{14} &= 0 \\ x_{53} + x_{58} - x_{25} - x_{65} &= 0 \\ x_{65} + x_{67} + x_{68} - x_{36} &= 0 \\ x_{78} - x_{47} - x_{67} &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = 0, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

A quantidade de petróleo que é recebida na estação 8 é igual a f , isto é

$$x_{58} + x_{68} + x_{78} = f \Leftrightarrow \sum_{j:(8,j) \in A} x_{8j} - \sum_{j:(j,8) \in A} x_{j8} = -f$$

A quantidade de petróleo que atravessa o arco (i, j) é não negativa e não pode ultrapassar a sua capacidade, ou seja

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in A$$

onde u_{ij} ($(i, j) \in A$) representa a capacidade do arco (i, j) .

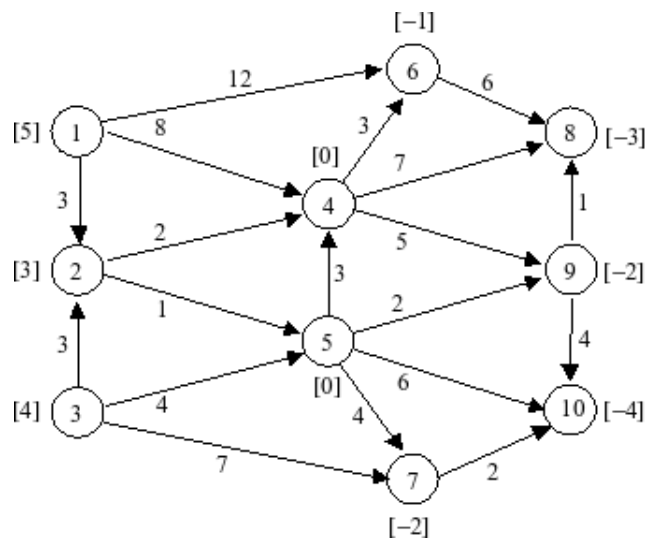
Tendo em conta que o objectivo do problema consiste em maximizar a quantidade de petróleo a enviar da estação 1 para a estação 8, podemos escrever o problema na forma de um programa linear

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } z = f \\ & \text{Sujeito a } \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = \begin{cases} f & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \\ -f & \text{se } i = t \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

onde s representa o nó inicial e t o nó terminal, ou seja $s = 1$ e $t = 8$. Qualquer problema que possa ser formulado deste modo é designado por *Problema do Fluxo Máximo*.

5. PROBLEMA DO FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

Uma empresa de rações para animais fornece cinco clientes a partir das suas três fábricas. As fábricas podem enviar as rações directamente ou indirectamente através de outras fábricas, clientes ou pontos de transexpedição. Na rede, que aparece a seguir, as fábricas são representadas pelos nós 1, 2 e 3, os pontos de transexpedição pelos nós 4 e 5 e os clientes pelos nós 6, 7, 8, 9 e 10. Associado a cada nó existe um valor, designado por requerimento, que pode ter vários significados. Um requerimento positivo está associado a uma fábrica e representa a sua capacidade. Um requerimento negativo está associado a um cliente e o seu valor absoluto representa a procura do cliente. Um requerimento nulo está associado a um nó de transexpedição. Os arcos da rede representam as ligações directas que existem entre os vários nós. A cada arco da rede está associado um valor que representa o custo de transporte de cada tonelada de ração que atravessa esse arco. O objectivo deste problema consiste em determinar as quantidades de ração que devem ser enviadas de cada uma das fábricas para cada um dos clientes de forma a minimizar o custo total de transporte.



Formulação. Para obtermos o problema matemático, começamos por definir os conjuntos de nós N e de arcos

A da rede

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (3, 7), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (5, 4), (5, 7), (5, 9), (5, 10), (6, 8), (7, 10), (9, 8), (9, 10)\}$$

e representamos por x_{ij} ($(i, j) \in A$) a quantidade que atravessa o arco (i, j) .

A diferença entre a quantidade de ração que chega ao nó i ($i = 1, 2, \dots, 10$) e a quantidade que sai do nó i é igual ao requerimento desse mesmo nó i . Esta condição pode ser traduzida pelas seguintes restrições

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{14} + x_{16} &= 5 \\ x_{24} + x_{25} - x_{12} - x_{32} &= 3 \\ x_{32} + x_{35} + x_{37} &= 4 \\ x_{46} + x_{48} + x_{49} - x_{14} - x_{24} - x_{54} &= 0 \\ x_{54} + x_{57} + x_{59} + x_{5,10} - x_{25} - x_{35} &= 0 \\ x_{68} - x_{16} - x_{46} &= -1 \\ x_{7,10} - x_{37} - x_{57} &= -2 \\ -x_{48} - x_{68} - x_{98} &= -3 \\ x_{98} + x_{9,10} - x_{49} - x_{59} &= -2 \\ -x_{5,10} - x_{7,10} - x_{9,10} &= -4 \end{aligned} \Leftrightarrow \sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i, \quad i \in N$$

com b_i ($i \in N$) o requerimento do nó i . A quantidade de ração que atravessa o arco (i, j) é não negativa, ou seja

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in A.$$

O custo total do transporte é igual à soma dos custos de cada percurso. Se representarmos por c_{ij} o custo de transportar uma tonelada de ração do nó i para o nó j , o custo de transportar x_{ij} toneladas de ração do nó i para o nó j é $c_{ij}x_{ij}$ e o custo total do transporte é dado por

$$z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij}$$

O programa linear contínuo associado a este problema é definido por

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} \\ \text{Sujeito a } &\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = b_i \quad (i \in N) \\ &x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

Qualquer problema que possa ser formulado deste modo é designado por *Problema do Fluxo de Custo Mínimo*.

3 Noções da Teoria de Grafos

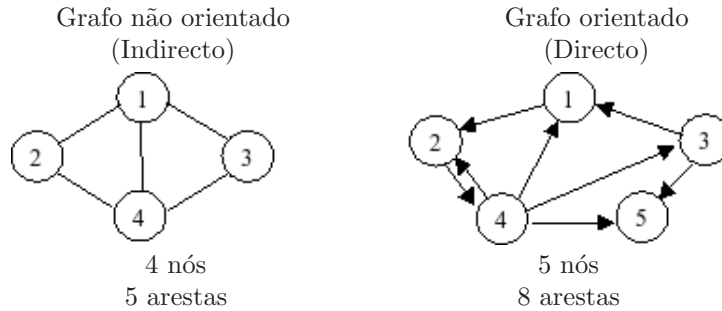
Um *Grafo* é constituído por:

- um conjunto V de m nós ou vértices $V = \{1, 2, \dots, m\}$,
- um conjunto E de n arestas ou arcos que ligam os nós do grafo $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

e representa-se por

$$G = (V, E)$$

Cada aresta une dois vértices i e j e representa-se por $\{i, j\}$ ou (i, j) ((j, i)), consoante o grafo for não orientado (indirecto) ou orientado (directo) respectivamente. No arco (i, j) ou $\{i, j\}$, i diz-se o *Nó Inicial* e j *Nó Terminal*.



Dois nós dizem-se *Adjacentes* se existe uma aresta do grafo que os une. Assim, se G é um grafo orientado,

$$i, j \text{ são adjacentes} \Leftrightarrow (i, j) \in E \text{ ou } (j, i) \in E.$$

Se G é não orientado,

$$i, j \text{ são adjacentes} \Leftrightarrow \{i, j\} \in E.$$

O *Grau de um Nó* i é o número de nós adjacentes a i e representa-se por $deg(i)$. Assim, no grafo não orientado anterior tem-se

$$deg(1) = 3, \quad deg(2) = 2, \quad deg(3) = 2, \quad deg(4) = 3.$$

Num grafo orientado consideram-se duas quantidades associadas a cada nó i :

$$\text{Grau de Entrada} = indeg(i) = \text{n}^\circ \text{ de nós } j \text{ tais que } (j, i) \in E$$

$$\text{Grau de Saída} = outdeg(i) = \text{n}^\circ \text{ de nós } j \text{ tais que } (i, j) \in E$$

Então para cada nó i de um grafo orientado, tem-se

$$deg(i) = indeg(i) + outdeg(i).$$

Assim, no exemplo do grafo orientado anterior

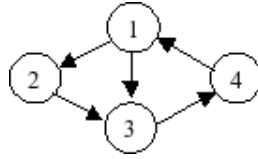
$$indeg(4) = 1, \quad outdeg(4) = 4, \quad deg(4) = 5.$$

Um *Caminho do Nó* i_0 *ao Nó* i_p é uma sequência de nós e arcos distintos

$$(i_0, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p-1}, i_p)$$

em que o nó inicial de cada arco é o nó terminal do arco anterior do caminho. Ao nó i_0 dá-se o nome de *Nó Inicial* ou *Origem* do caminho, enquanto que i_p se denomina *Nó Terminal* ou *Destino*.

Se o grafo é orientado, então considera-se que num caminho de i_0 para i_p todos os arcos têm o mesmo sentido de i_0 para i_p . Se tal não acontecer o caminho é não dirigido e é denominado *Cadeia*. Notar que, tal como no caminho, uma cadeia não permite repetição de arestas. A título de exemplo considere-se o grafo



Então

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 & \quad [(1, 2), (2, 3), (3, 4)] \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 & \quad [(1, 3), (3, 4)] \end{aligned}$$

são caminhos de 1 para 4. Portanto são também cadeias de 1 para 4. Por outro lado

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 4 \quad [(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 1)]$$

é uma cadeia de 1 para 4 que não é caminho.

Um caminho (cadeia) diz-se *Simples* se não há repetição de nós. De outro modo diz-se *Misto*. No exemplo anterior

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

é simples, enquanto que

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 4$$

é uma cadeia mista.

Um *Circuito* é um caminho fechado, isto é, em que o nó inicial e terminal coincidem. Um *Ciclo* é uma cadeia fechada. Assim, no exemplo anterior

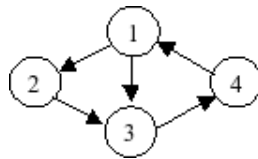
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

é um circuito, enquanto que

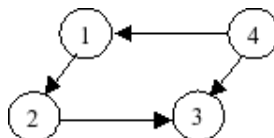
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 1$$

é um ciclo.

Um grafo diz-se *Conexo* se dois quaisquer nós estão ligados por uma cadeia. Um grafo é *Fortemente Conexo* se dois quaisquer nós estão ligados por um caminho. Em grafos não orientados os dois conceitos coincidem. A título de exemplo, o grafo

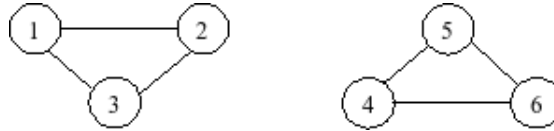


é fortemente conexo, enquanto que



é um grafo conexo mas não fortemente conexo.

Um grafo é *Desconexo* se não é conexo. Assim



é desconexo.

Um grafo diz-se *Bipartido* se for possível particionar o conjunto de nós V em dois subconjuntos V_1 e V_2 de forma que

$$\begin{aligned} & \forall_{(i,j) \in E} i \in V_1 \text{ e } j \in V_2 \text{ (orientado)} \\ & \forall_{\{i,j\} \in E} i \in V_1 \text{ e } j \in V_2 \text{ (não orientado)} \\ & V = V_1 \cup V_2 \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset \end{aligned}$$

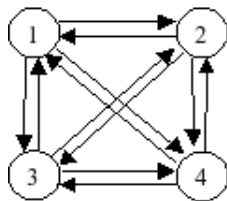
Assim por exemplo o problema de transporte pode ser visto como um problema de otimização num grafo bipartido. Os nós $i \in V_1$ dizem-se *Origens* enquanto que os nós $j \in V_2$ se denominam *Destinos*.

Um grafo diz-se *Completo* se dois quaisquer dos seus nós estão ligados entre si por uma ou duas arestas, dependendo de ser não orientado ou orientado. Assim grafos orientados completos verificam

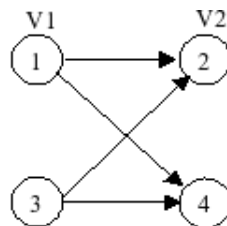
$$\forall i \in V \forall j \in V - \{i\} (i, j) \in E \text{ e } (j, i) \in E$$

e para grafos não orientados completos, tem-se

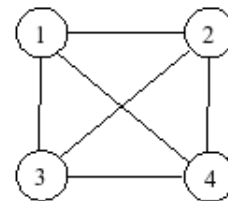
$$\forall i \in V \forall j \in V - \{i\} \{i, j\} \in E$$



Grafo orientado completo



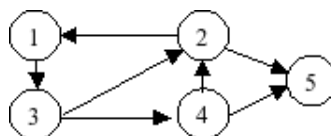
Grafo bipartido completo



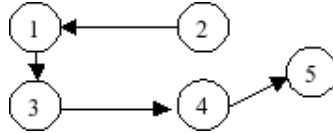
Grafo não orientado completo

É de notar que o número de arestas de um grafo completo orientado é $m(m - 1)$, com m o número de nós. Esse número é de apenas $m(m - 1)/2$ no caso do grafo ser não orientado. Por outro lado, se m e n são os números de nós da partição $\{V_1, V_2\}$ de um grafo bipartido completo, então o seu número de arestas é $m \times n$. Finalmente notemos que o problema de transportes é modelado como um problema de otimização dum grafo bipartido orientado completo.

Dado um grafo $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ diz-se um *Subgrafo* de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se $G' \neq G$, o subgrafo diz-se *Próprio*. Se G' é um subgrafo próprio de G e $V' = V$, então G' diz-se um *Subgrafo Gerador* (ou de *Suporte*) de G . Assim por exemplo, para o grafo G definido por



o grafo G'



é um subgrafo gerador de G .

Uma *Árvore* é um grafo conexo sem ciclos. O grafo anterior G' é uma árvore.

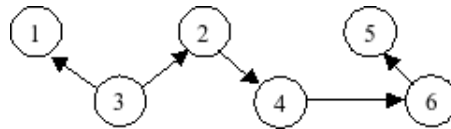
Uma *Árvore Geradora* de um grafo G é uma árvore que contém todos os nós do grafo G . Assim a árvore anterior G' é geradora para o grafo G .

As árvores têm algumas propriedades interessantes que, como veremos mais adiante, são devidamente exploradas na resolução de problemas de otimização em grafos. Algumas dessas propriedades são apresentadas a seguir.

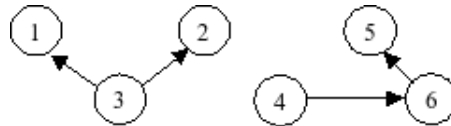
Propriedades das árvores

P_1 . Se $T = (V, E)$ é uma árvore e se $(i, j) \in E$ for retirada de E , então T é transformada em duas árvores.

A título de exemplo considere-se a árvore



Se retirarmos a aresta $(2,4)$ obtêm-se as árvores



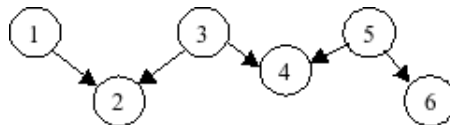
P_2 . Toda a árvore tem pelo menos dois nós com grau igual a um, que se dizem *Folhas da Árvore*.

P_3 . Uma árvore com m nós tem $(m - 1)$ arestas.

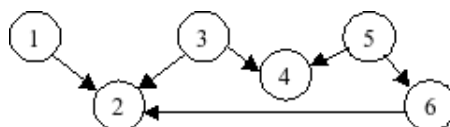
P_4 . Qualquer par de nós i, j de uma árvore estão ligados por uma única cadeia.

P_5 . Se acrescentarmos uma aresta a uma árvore obtêm-se um grafo com exactamente um ciclo.

Assim por exemplo, consideremos a árvore



É fácil de ver que as propriedades P_3 e P_4 são verdadeiras. Suponhamos que acrescentamos a aresta $(6,2)$ à árvore. Então obtêm-se o grafo



que contém exactamente o ciclo

$$2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$$

Um grafo diz-se *Pesado* se cada aresta (i, j) ou cada nó r ou ambos têm associado um peso c_{ij} ou b_r . Nesse caso o grafo é também denominado *Rede*.

4 Árvore Geradora de Custo Mínimo

Dado um grafo $G = (V, E)$ pesado com custos c_{ij} em cada aresta $(i, j) \in E$, uma árvore geradora é uma árvore que contém todos os nós do grafo. Uma *Árvore Geradora de Custo Mínimo* $T = (V, A)$ é uma árvore geradora tal que

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in A'} c_{ij}$$

para qualquer outra árvore $T' = (V, A')$.

Seguidamente iremos discutir o *Algoritmo de Kruskal* para determinação da árvore geradora de custo mínimo de um grafo com m nós. O processo é extremamente simples e é uma consequência da definição de árvore geradora de custo mínimo. A primeira fase consiste em ordenar os custos c_{ij} por ordem não decrescente e depois ir escolhendo as arestas segundo essa ordem de modo a não autorizar a existência de ciclos. Como toda a árvore de m nós tem exactamente $(m-1)$ arestas, então o processo consiste de p iterações, com $m-1 \leq p \leq n$. Os passos do algoritmo são apresentados a seguir.

ALGORITMO DE KRUSKAL

Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo, $A = \emptyset$ e \bar{A} o conjunto das arestas de E ordenadas por ordem não-decrescente de custos.

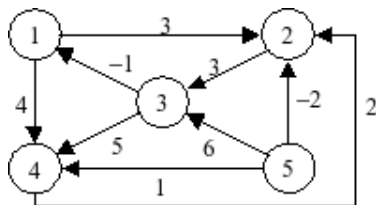
Enquanto $|A| < m - 1$, faça

 Seja (r, s) o primeiro elemento de \bar{A} .

 Actualize o conjunto $\bar{A} = \bar{A} - \{(r, s)\}$.

 Se (r, s) não forma ciclo com as arestas de A , faça $A = A \cup \{(r, s)\}$.

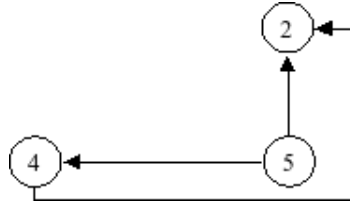
É de notar que é necessário utilizar um algoritmo de ordenação para construir o conjunto \bar{A} inicial. A título de exemplo consideremos o seguinte grafo



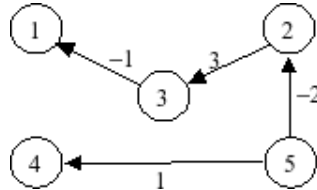
Então

$$\bar{A} = \{(5, 2), (3, 1), (5, 4), (4, 2), (2, 3), (1, 2), (1, 4), (3, 4), (5, 3)\}$$

e $A = \emptyset$. O algoritmo começa por escolher a aresta $(5, 2)$, depois a aresta $(3, 1)$ e na terceira iteração obtém $(5, 4)$. Na quarta iteração não escolhe a aresta $(4, 2)$, pois isso iria formar o ciclo



Então a aresta $(2, 3)$ é escolhida. Como $m = 5$, o algoritmo termina nessa iteração com a seguinte árvore



Antes de terminar esta secção é importante acrescentar que é evidentemente possível desenvolver um processo semelhante ao algoritmo de Kruskal para determinar uma outra árvore geradora que não seja de custo mínimo. Com efeito, basta ordenar as arestas de uma forma diferente da usada no algoritmo.

5 Problema do Fluxo de Custo Mínimo: Definição e Propriedades

Considere-se um grafo pesado, orientado e conexo $G = (V, E)$ com m nós $i \in V$ e n arestas $(i, j) \in E$. Cada nó i tem associado uma quantidade b_i , onde

- $b_i > 0 \rightarrow$ nó oferta
- $b_i < 0 \rightarrow$ nó procura
- $b_i = 0 \rightarrow$ nó intermédio

Cada aresta (i, j) tem associada uma quantidade x_{ij} que representa o fluxo a enviar do nó i para o nó j . Além disso c_{ij} representa o custo unitário de fluxo de i para j ao longo da aresta (i, j) .

O *Problema de Fluxo de Custo Mínimo* procura determinar o fluxo a enviar através dos nós do grafo G de modo a minimizar o custo total da distribuição e a satisfazer as chamadas *Condições de Conservação de Fluxo* em cada nó i :

$$\text{Fluxo que sai} - \text{Fluxo que entra} = \text{Fluxo que existe}$$

Assim, o problema pode ser escrito como

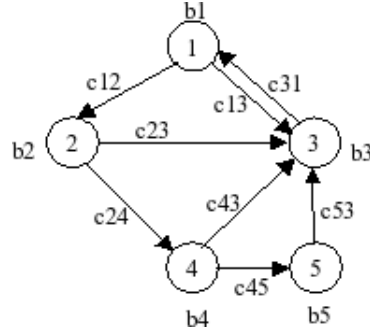
$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \end{aligned} \tag{1}$$

Como veremos mais adiante, existem formas mais gerais deste problema, a saber

1. Existência de capacidades u_{ij} e l_{ij} em cada aresta (i, j) , isto é, restrições $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$.
2. Função a minimizar ser não linear.

3. Vários produtos ou mercadorias a enviar em vez de apenas um – *Problema de Fluxo Multicomodidade*.

Para ilustrar a formulação do problema como um programa linear da forma apresentada anteriormente, consideremos o seguinte grafo $G = (V, E)$



onde incluímos as quantidades b_i e os custos c_{ij} . Então

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 3)\}$$

e portanto a formulação de programação linear contém 8 variáveis x_{ij} , $(i, j) \in E$ e 5 restrições de igualdade correspondentes à conservação de fluxo em cada um dos nós 1, 2, 3, 4, 5. Assim tem-se

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{43}x_{43} + c_{45}x_{45} + c_{53}x_{53} \\ \text{Sujeito a} \quad & x_{12} + x_{13} \qquad \qquad \qquad - x_{31} \qquad \qquad \qquad = b_1 \\ & -x_{12} \qquad + x_{23} + x_{24} \qquad \qquad \qquad = b_2 \\ & \qquad \qquad -x_{13} - x_{23} \qquad + x_{31} - x_{43} \qquad - x_{53} = b_3 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad -x_{24} \qquad + x_{43} + x_{45} \qquad = b_4 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -x_{45} + x_{53} = b_5 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

É de notar que nesta formulação, cada variável x_{ij} aparece em duas equações, uma vez com coeficiente (+1) e outra vez com coeficiente (-1).

Se adicionarmos estas equações membro a membro obtemos a *Condição Necessária de Admissibilidade* seguinte

$$\sum_{i=1}^m b_i = 0 \tag{2}$$

Um problema de fluxo de custo mínimo diz-se *Equilibrado* se esta última condição se verificar. Se tal não acontecer, o problema diz-se *Não Equilibrado* e para o equilibrar é necessário introduzir um nó adicional ($m+1$) com fluxo

$$b_{m+1} = -\sum_{i=1}^m b_i$$

e arcos $(i, m+1)$ ou $(m+1, i)$ com custos unitários nulos. Esse problema será discutido mais adiante, pelo que iremos assumir por agora que a condição (2) é verdadeira.

O programa linear anterior pode ser escrito na forma normal:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= c^T x \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde

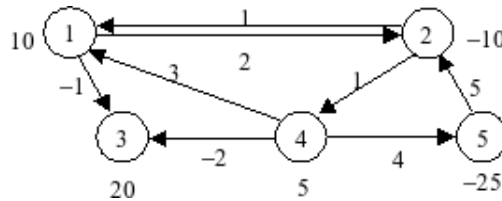
$m = |V| = \text{n}^\circ \text{ de nós}, \quad n = |E| = \text{n}^\circ \text{ de arestas.}$

$$x = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^n, \quad c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^n, \quad b = [b_i] \in \mathbb{R}^m$$

e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz incidência nó-arco. Cada coluna $A_{.j}$ de A está associada a uma variável x_{ik} , com $i, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ e só tem dois elementos não nulos $+1$ e -1 nas linhas i e k de acordo com o seguinte esquema:



A título de exemplo consideremos o problema de fluxo de custo mínimo associado à rede



Então o problema é equilibrado, pois

$$\sum_{i=1}^5 b_i = 0$$

Os vectores c , x e b e a matriz A da sua forma normal são os seguintes

$$x = [x_{12} \ x_{13} \ x_{21} \ x_{24} \ x_{41} \ x_{43} \ x_{45} \ x_{52}]^T, \quad c = [2 \ -1 \ 1 \ 1 \ 3 \ -2 \ 4 \ 2]^T$$

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \\ -25 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & & -1 & & & \\ -1 & & 1 & 1 & & & & -1 \\ & & -1 & & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguidamente apresentamos algumas propriedades da matriz de incidência A .

P_6 . A matriz de incidência tem característica igual a $(m - 1)$, com m o número de nós da rede G .

Demonstração. Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

com $A_i, i = 1, \dots, m$, as linhas de A , então

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0$$

Portanto as linhas de A são linearmente dependentes e a característica de A , $C(A)$, é menor ou igual do que $(m - 1)$. Para estabelecer que $C(A) = m - 1$, consideremos uma árvore geradora $T = (V, E')$ com $V = \{1, \dots, m\}$. Então existe uma matriz de permutação Q_1 tal que

$$AQ_1 = [A_T \ A_{\bar{T}}]$$

com \bar{T} o complementar de T em $\{1, 2, \dots, n\}$. Como a árvore tem exactamente $(m - 1)$ arestas, então

$$A_T \in \mathbb{R}^{m \times (m-1)}$$

Além disso para um nó folha $i \in V$, existe um só nó adjacente j tal que $(i, j) \in E'$. Portanto por permutação de linhas e colunas podemos escrever

$$PA_TQ = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ a^1 & A_{T'} \end{bmatrix}$$

com T' o conjunto das colunas de A associadas à árvore T' que se obtém de T suprimindo o nó i e o arco que liga esse nó ao seu adjacente j e P, Q matrizes de permutação.

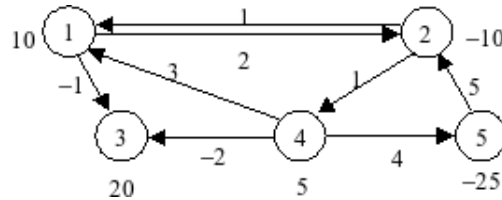
O mesmo tipo raciocínio pode ser agora aplicado mais $(m - 3)$ vezes e obter a seguinte igualdade

$$\bar{P}A_T\bar{Q} = \begin{bmatrix} \pm 1 & & & & & \\ a^1 & \pm 1 & & & & \\ & a^2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \pm 1 & & \\ & & & a^{m-2} & \pm 1 & \\ & & & & \pm 1 & \\ & & & & & \pm 1 \end{bmatrix}$$

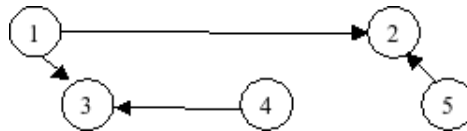
com $a^i, i = 1, 2, \dots, m - 2$ vectores de ordens $(m - 1), (m - 2), \dots, 2$ com apenas uma componente não nula e igual a ± 1 . É agora evidente que $c(A_T) = m - 1$ e o mesmo acontece com a característica de A . \square

É de notar que a demonstração deste teorema também estabelece que a submatriz A_T da matriz de incidência associada a uma árvore geradora T tem característica $(m - 1)$. Além disso se acrescentarmos uma coluna da matriz identidade $e^r \in \mathbb{R}^m$ à matriz A_T , então a matriz resultante é não singular e pode ser transformada numa matriz triangular superior U por permutação de linhas e colunas. Os elementos diagonais de U são iguais a 1 ou -1 e a característica da matriz $[A \ e^r]$ é igual a m .

A título de exemplo, consideremos o grafo



e a árvore geradora



Se escolhermos o vector da base canónica $e^1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, então

$$B = [A_T \ e^1] = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{34} & x_{52} & \\ 1 & 1 & & 1 & \\ -1 & & -1 & -1 & \\ & -1 & -1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}$$

Então existe uma matriz de permutação Q tal que

$$BQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \\ & -1 & & & -1 \\ & & -1 & -1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

é triangular superior com elementos diagonais iguais a ± 1 .

Tal como referimos anteriormente, o método simplex é o processo mais usado para resolver programas lineares. Esse algoritmo deve ser implementado de modo a poder processar eficientemente o problema de fluxo de custo mínimo. Nesse sentido é importante caracterizar em termos de grafos uma solução básica admissível para o problema.

Definição de Solução Básica Admissível Consideremos o problema de fluxo de custo mínimo na forma normal anterior. A matriz incidência nó-arco tem característica $(m - 1)$, com m o número de restrições de igualdade. Além disso se acrescentarmos uma coluna da base canónica e^r à matriz A , então a matriz resultante tem característica igual a m . Essas considerações conduzem-nos ao seguinte programa linear aumentado

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax + e^r x_{n+1} = b \\ & x \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

onde A , c , x e b têm o mesmo significado anterior. As seguintes propriedades são consequências do teorema anterior.

P_7 . $x_{n+1} = 0$ em qualquer solução admissível.

P_8 . A característica de $[A \ e^r]$ é m , para qualquer $r = 1, 2, \dots, m$.

P_9 . Se A_K é a submatriz associada a uma árvore geradora com arestas $(i, j) \in J$, então a matriz $[A_K \ e^r]$ é não singular e existem matrizes de permutação P e Q tais que

$$[A_K \ e^r] = PUQ$$

com U uma matriz triangular superior com elementos diagonais iguais a ± 1 . Além disso:

$$[A_K \ e^r] \begin{bmatrix} x_J \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow x_{n+1} = 0 \text{ e } A_K x_J = b$$

Estas propriedades permitem-nos definir uma solução básica para o problema de fluxo de custo mínimo aumentado. Se J é o conjunto dos índices das arestas de uma árvore geradora, então a *Solução Básica* associada a J é definida por:

Variáveis básicas: $x_{ij}, (i, j) \in J, x_{n+1}$

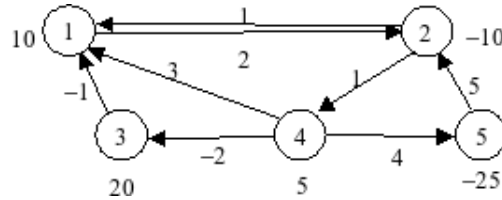
Variáveis não básicas: $x_{ij} = 0, (i, j) \in E - J = L$

Devido à propriedade P_9 , $x_{n+1} = 0$ e portanto toda a solução básica é degenerada. Além disso as restantes variáveis básicas $x_{ij}, (i, j) \in E$ satisfazem

$$A_K x_J = b$$

com $A_K \in \mathbb{R}^{m \times (m-1)}$ a submatriz de A associada às variáveis básicas. Assim para determinar os valores das variáveis básicas é necessário resolver o sistema de equações lineares associado às restrições de conservação de fluxo e variáveis x_{ij} , com (i, j) as arestas da árvore geradora. Isso é conseguido de uma maneira muito simples, escrevendo as equações que definem a árvore geradora de modo a que a primeira equação tenha associado um nó folha.

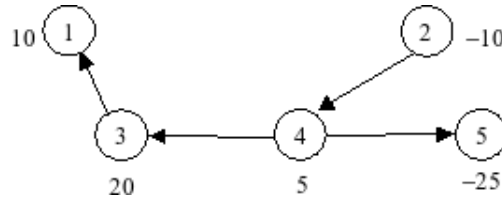
A título de exemplo, consideremos o grafo



Seja

$$J = \{(3, 1), (4, 3), (4, 5), (2, 4)\}.$$

O subgrafo constituído pelos nós do grafo dado e as arestas $(i, j) \in J$ é a seguinte árvore



Para determinar os valores das variáveis básicas, tem-se

$$\begin{cases} -x_{31} & & & & & = & 10 \\ x_{31} & -x_{43} & & & & = & 20 \\ & x_{43} & -x_{24} & +x_{45} & & = & 5 \\ & & x_{24} & & & = & -10 \\ & & & & -x_{45} & = & -25 \end{cases}$$

Portanto os valores das variáveis básicas da solução básica escolhida são

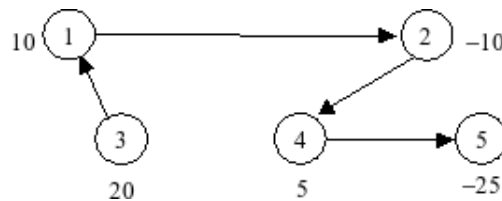
$$\begin{cases} x_{31} & = & -10 \\ x_{43} & = & -30 \\ x_{24} & = & -10 \\ x_{45} & = & 25 \end{cases}$$

É evidente que as variáveis não básicas dessa solução básica são todas nulas.

Uma solução básica é *Admissível* se as restrições de não negatividade $x_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in E$ são todas satisfeitas. Assim a solução básica do exemplo anterior é não admissível, pois há pelo menos uma variável básica negativa. Como exemplo de uma solução básica admissível para o grafo considerado anteriormente, consideremos o conjunto

$$J = \{(3, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5)\}.$$

Então os nós de V e as arestas de J formam a seguinte árvore



Para determinar os valores das variáveis básicas, tem-se

$$\begin{cases} x_{31} & & & & = & 20 \\ -x_{31} & +x_{12} & & & = & 10 \\ & -x_{12} & +x_{24} & & = & -10 \\ & & -x_{24} & +x_{45} & = & 5 \\ & & & -x_{45} & = & -25 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} x_{31} & = & 20 \\ x_{12} & = & 30 \\ x_{24} & = & 20 \\ x_{45} & = & 25 \end{cases}$$

Como todas as variáveis básicas são não negativas, então a solução básica é admissível.

Consideremos agora a determinação da solução dual $\pi \in \mathbb{R}^m$ associada a uma solução básica do problema de fluxo de custo mínimo. Então π satisfaz o sistema

$$B^T \pi = \begin{bmatrix} c_J \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_K^T \\ (e^r)^T \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} c_J \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\pi_r = 0$$

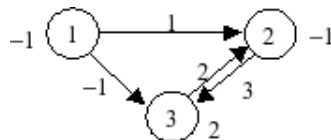
$$A_K^T \pi = c_J$$

Portanto a solução dual associada a uma solução básica não é única, pois depende da escolha do vector e^r da base canónica que se acrescenta ao conjunto de restrições do problema. Além disso para calcular π , é necessário fixar uma variável π_i a zero e depois resolver o sistema $A_K^T \pi = c_J$. Como iremos ver na próxima secção esse processo é relativamente fácil de fazer a partir da árvore geradora associada à solução básica.

Como o problema de fluxo de custo mínimo é um programa linear, então pode acontecer um de três casos possíveis:

1. Existência de solução óptima.
2. Inadmissibilidade.
3. Problema ilimitado.

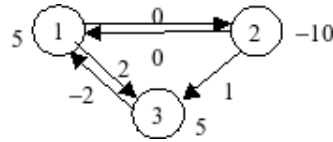
Como exemplo do segundo caso, consideremos o grafo



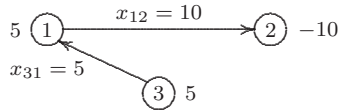
Então a equação correspondente ao nó 1 tem a forma

$$x_{12} + x_{13} = -1$$

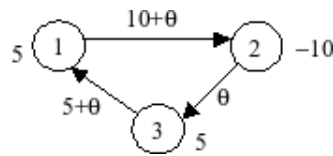
o que é impossível de verificar com $x_{ij} \geq 0$. Como exemplo de um problema ilimitado, consideremos o problema de fluxo de custo mínimo associado ao grafo:



Uma solução básica admissível inicial é definida pela árvore



Consideremos agora que a variável não básica x_{23} aumenta o seu valor para $\theta > 0$. Então obtém-se o seguinte ciclo



Facilmente se conclui que θ pode aumentar infinitamente sem violar as condições de conservação de fluxo em cada nó. Além disso o valor da função linear é dado por

$$z = c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + c_{31}x_{31} = 0 \times (10 + \theta) + 1 \times \theta - 2 \times (5 + \theta) = -10 - \theta$$

e tende para $(-\infty)$ quando θ tende para $(+\infty)$.

6 Método Simplex para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo

O método de simplex é um processo que usa em cada iteração soluções básicas (árvores geradoras) admissíveis sobre o grafo do problema, que por sua vez são transformadas umas nas outras por regras que têm apenas que ver com a manutenção das condições de compatibilidade em cada nó i , isto é, o que sai menos o que entra é igual a b_i . Em cada iteração a variável não básica é escolhida a partir dos coeficientes de custo reduzidos, que por sua vez são calculados recorrendo à propriedade da complementaridade entre variáveis do problema primal e dual. Da estrutura do problema de fluxo apresentada em (1), facilmente se conclui que cada variável x_{ij} do problema aparece duas vezes em cada coluna, uma vez com coeficiente $(+1)$ e outra vez com coeficiente (-1) . A escolha desse coeficiente depende do nó i ser nó de partida ou de chegada. Por isso o dual do problema de fluxo tem a forma

$$\begin{aligned} \text{Maximize } w &= \sum_{i=1}^m b_i w_i \\ \text{Sujeito a } & w_i - w_j \leq c_{ij}, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

Para satisfazer a propriedade da complementaridade, as variáveis duais de folga tem de ser nulas para cada $(i, j) \in J$, ou seja,

$$w_i - w_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in J \quad (3)$$

com J o conjunto dos arcos da árvore nessa iteração. Como o número de variáveis duais é igual a m e uma árvore geradora tem $(m - 1)$ arcos, então o sistema é indeterminado. Isso confirma o afirmado na secção anterior

acerca da solução dual. Por isso, fixa-se $w_1 = 0$ e determinam-se os valores das restantes variáveis duais em sucessão. Os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} , $(i, j) \in L = E - J$ representam os valores das restantes variáveis duais de folga, e portanto satisfazem:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (w_i - w_j) \quad (4)$$

de acordo com o esquema

$$w_i \text{ (i)} \xrightarrow{c_{ij}} \text{ (j)} w_j \quad \implies \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - (w_i - w_j)$$

Após o cálculo de todos os coeficientes de custo reduzidos associados às variáveis não básicas, dois casos podem acontecer e são discutidos a seguir:

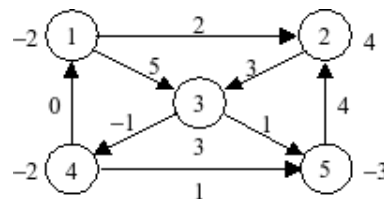
1. Se $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para todo o $(i, j) \in L$, a solução dada é ótima e o algoritmo termina.
2. Se existe pelo menos um $\bar{c}_{ij} < 0$, calcula-se

$$\bar{c}_{rs} = \min\{\bar{c}_{ij} : (i, j) \in L = E - J\}$$

O acréscimo do arco (r, s) na árvore geradora forma um ciclo que é desfeito de acordo com a regra de compatibilidade, isto é, o que entra em cada nó i menos o que sai desse nó é igual à quantidade b_i que lá existe. Por isso a variável x_{rs} tomará um valor θ e cada uma das variáveis x_{ij} desse ciclo aumentará ou diminuirá o seu valor dessa quantidade θ . O valor de θ deverá ser o maior possível de modo a que todas as variáveis envolvidas nesse ciclo se mantenham não negativas. Como consequência, uma das variáveis nesse ciclo anular-se-á e o arco associado a essa variável destrói o ciclo e permite obter uma nova árvore geradora, que corresponde a uma nova solução básica admissível para o problema de fluxo de custo mínimo.

Para uma descrição completa do método simplex neste caso, falta apenas referir como se calcula uma primeira solução básica admissível. Como cada solução básica corresponde a uma árvore, é bastante fácil de se obter uma primeira solução básica. Contudo essa solução pode não ser admissível e em geral é necessário aplicar um processo Fase I, que por sua vez será um problema de fluxo de custo mínimo a discutir na próxima secção.

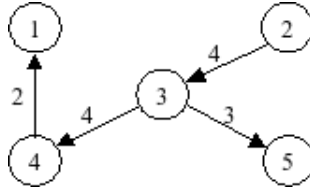
Como exemplo de ilustração da aplicação do método simplex, consideremos o seguinte problema do fluxo de custo mínimo



É fácil de concluir que se trata de um problema equilibrado com 5 restrições e 8 variáveis. Com efeito, o grafo do problema tem 5 nós e 8 arcos e além disso

$$\sum_{i=1}^5 b_i = -2 + 4 + 3 - 2 - 3 = 0$$

Por inspeção é fácil de obter uma primeira árvore geradora que satisfaça as restrições de compatibilidade em cada nó. Essa árvore com os valores de fluxo associados a cada arco é apresentada a seguir



Com efeito, o nó 1 tem que receber 2 unidades de fluxo, pois $b_1 = -2$. Além disso o nó 2 deve enviar 4 unidades e no nó 3 o fluxo que sai menos o que entra iguala o valor de b_3 . A mesma relação se verifica no nó 4 e finalmente o nó 5 recebe a quantidade de fluxo que requireu.

Para verificar se a solução admissível obtida é óptima é necessário calcular primeiramente as variáveis duais w_i , $i = 1, \dots, 5$. Fazendo $w_1 = 0$, então o arco (4, 1) implica

$$w_4 - w_1 = c_{41} \Rightarrow w_4 = c_{41} = 0.$$

Do mesmo modo, usando o arco (3, 4), vem

$$w_3 - w_4 = c_{34} \Rightarrow w_3 = c_{34} = -1.$$

Agora do arco (2, 3) tem-se

$$w_2 - w_3 = c_{23} \Rightarrow w_2 = c_{23} + w_3 = 3 + (-1) = 2.$$

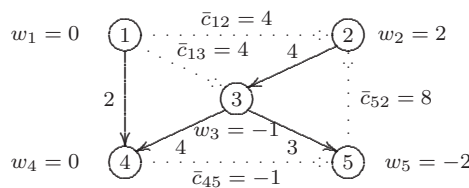
Finalmente o arco (3, 5) implica

$$w_3 - w_5 = c_{35} \Rightarrow w_5 = -c_{35} + w_3 = -1 + (-1) = -2.$$

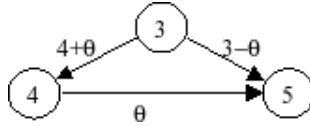
Uma vez calculada a solução dual há que determinar os coeficientes de custo reduzidos das variáveis não básicas, isto é, associados com arcos do grafo que não pertencem à árvore geradora. Assim tem-se

$$\begin{aligned} \bar{c}_{12} &= c_{12} - (w_1 - w_2) = 2 - (0 - 2) = 4 \\ \bar{c}_{13} &= c_{13} - (w_1 - w_3) = 5 - (0 - (-1)) = 4 \\ \bar{c}_{45} &= c_{45} - (w_4 - w_5) = 1 - (0 - (-2)) = -1 \\ \bar{c}_{52} &= c_{52} - (w_5 - w_2) = 4 - (-2 - 2) = 8 \end{aligned}$$

Esta informação referente aos valores das variáveis duais w_i e dos coeficientes de custo é apresentada num grafo que contém a árvore geradora obtida primeiramente. Os arcos referentes às variáveis não básicas podem ficar a tracejado para se distinguirem melhor dos arcos da árvore geradora. Além disso os valores das variáveis duais são colocados em cada um dos nós desse grafo e os coeficientes de custo reduzidos em cada um dos arcos a tracejado. No nosso exemplo obtém-se o seguinte grafo



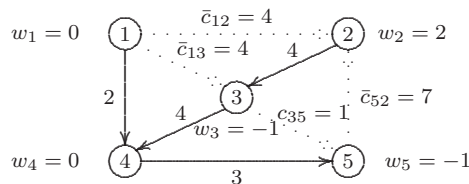
Como $\bar{c}_{45} < 0$ a solução básica admissível não é óptima. Além disso \bar{c}_{45} é o único coeficiente de custo reduzido negativo, pelo que o arco (4, 5) irá tornar-se básico formando o ciclo



A escolha de $+\theta$ ou $-\theta$ em cada um dos arcos desse ciclo depende dos sentidos desses mesmos arcos. Assim no exemplo presente, como do arco $(4,5)$ têm de ser enviadas θ unidades de fluxo, então o arco $(3,4)$ tem de levar mais θ unidades de modo a equilibrar o nó 4. Do mesmo modo se o nó recebe mais θ unidades de fluxo pelo novo arco, então terá de receber menos θ pela outro arco que lá chega.

O valor de θ é determinado como o maior valor positivo que mantenha não negativas todas as variáveis envolvidas neste ciclo e torne uma delas nula. Portanto $\theta = 3$ e o arco $(3,5)$ é retirado do ciclo, obtendo-se assim uma nova árvore.

Usando agora esta nova árvore e o procedimento explicado atrás, podemos calcular as variáveis duais e os coeficientes de custo reduzidos das variáveis não básicas. Todas essas operações são feitas num grafo de forma semelhante à obtida na iteração anterior. No nosso caso tem-se



Como $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para todos os arcos que não pertencem à árvore geradora, então o algoritmo termina com a solução óptima

$$\bar{x}_{23} = 4, \quad \bar{x}_{34} = 7, \quad \bar{x}_{41} = 2, \quad \bar{x}_{45} = 3,$$

$$\bar{x}_{12} = \bar{x}_{13} = \bar{x}_{35} = \bar{x}_{52} = 0.$$

O valor óptimo é dado por

$$\bar{z} = \sum_{(i,j) \in J} c_{ij} \bar{x}_{ij}$$

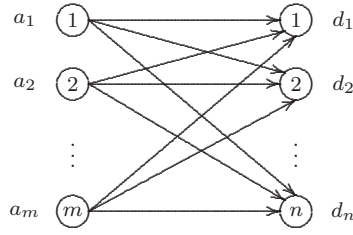
com J o conjunto dos pares ordenados associados aos arcos da árvore geradora (pois as outras variáveis são nulas). Então

$$\bar{z} = 3\bar{x}_{23} - \bar{x}_{34} + 0\bar{x}_{41} + \bar{x}_{45} = 8.$$

Para terminar esta secção referente à utilização do método simplex para o problema de fluxo de custo mínimo, notemos que implementação do processo tira partido do facto das matrizes bases serem permutações de matrizes triangulares superiores. Isso torna o método simplex muito mais rápido para resolver problemas de fluxo de custo mínimo do que para os outros programas lineares sem este tipo de estrutura.

7 Problema de Transportes

O problema de transportes pode ser representado pelo seguinte grafo bipartido completo:



e apresenta normalmente a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } &\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

onde $a_i > 0$ e $d_j > 0$ são as ofertas e procuras do problema. O problema de transportes diz-se *Equilibrado* se

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n d_j.$$

Tal como no problema de fluxo de custo mínimo, esta condição é necessária para que as igualdades sejam consistentes. A estrutura do problema de transportes garante a existência de solução óptima.

Teorema 1 *O problema de transportes tem solução óptima.*

Demonstração. Seja

$$\alpha = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

e consideremos a solução $\bar{x} = [\bar{x}_{ij}]$ definida por

$$\bar{x}_{ij} = \frac{a_i d_j}{\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Então \bar{x} é primal admissível, pois $\bar{x}_{ij} \geq 0$ para todos (i, j) e

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \frac{a_i}{\alpha} \sum_{j=1}^n d_j = \frac{a_i}{\alpha} \alpha = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \frac{d_j}{\alpha} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{d_j}{\alpha} \alpha = d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Para provar que a solução óptima existe é suficiente mostrar que as variáveis x_{ij} são limitadas. Como as variáveis são todas não negativas, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i &\Rightarrow 0 \leq x_{ij} \leq a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j &\Rightarrow 0 \leq x_{ij} \leq d_j \end{aligned}$$

Portanto para todos (i, j) tem-se

$$0 \leq x_{ij} \leq \min\{a_i, d_j\}$$

Isso demonstra o teorema. □

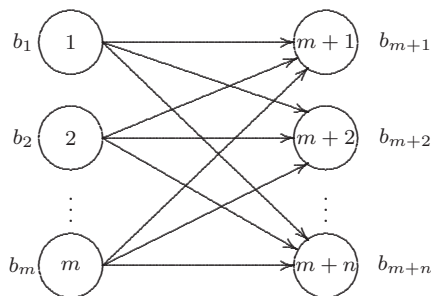
Seguidamente iremos provar que o problema de transportes se reduz a um problema de fluxo de custo mínimo. Para isso consideremos o vector $b \in \mathbb{R}^{m+n}$ definido por

$$b_i = \begin{cases} a_i & \text{se } i = 1, 2, \dots, m \\ -d_{i-m} & \text{se } i = m + 1, \dots, m + n \end{cases}$$

Então podemos escrever o problema de transportes na forma

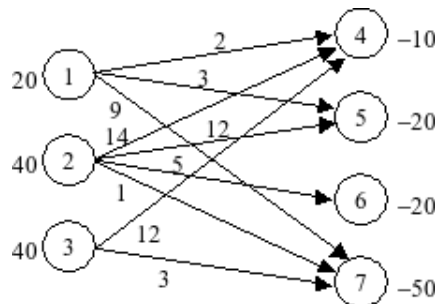
$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } &\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m+n \\ &x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

onde E é o conjunto de arcos do problema de fluxo de custo mínimo equivalente:



É de notar que para qualquer $i \in \{1, \dots, m\}$ se tem $(i, j) \in E$ para $j = m + 1, \dots, m + n$ e não há qualquer par ordenado (j, i) do conjunto E . Por outro lado para cada $i \in \{m + 1, \dots, m + n\}$, $(k, i) \in E$ para todo $k = 1, \dots, m$ e não há qualquer par ordenado (i, k) de E . Tendo em conta essas considerações e a definição do vector b , facilmente se conclui que a formulação apresentada em cima é equivalente à formulação tradicional do problema de transportes.

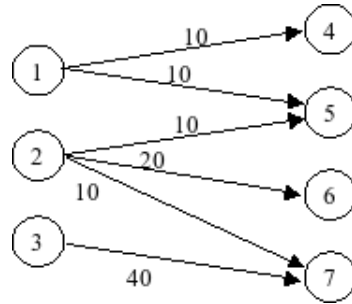
Como o problema de transportes é um caso particular do problema de fluxo de custo mínimo com a numeração de nós $1, 2, \dots, m + n$, então podemos resolvê-lo usando o algoritmo simplex apresentado na secção anterior. A título de exemplo consideremos o problema de transportes associado ao seguinte grafo bipartido não completo (os percursos entre os nós $1 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 5$ e $3 \rightarrow 6$ não se podem efectuar)



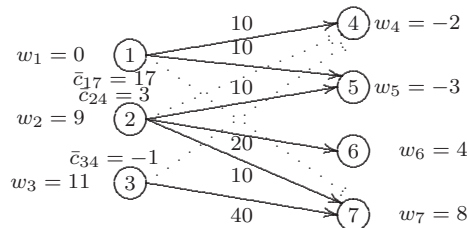
É de notar que já estamos a considerar a formulação como problema de fluxo de custo mínimo, dado o facto de usarmos a numeração $1, \dots, 7$ e de associarmos valores negativos para os parâmetros b_i referentes aos nós destinos. É ainda de notar que o problema é equilibrado, pois

$$\sum_{i=1}^7 b_i = 20 + 40 + 20 - 10 - 20 - 20 - 50 = 0.$$

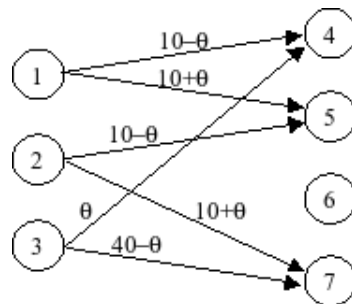
Uma solução básica admissível inicial é facilmente calculada esgotando as ofertas e as procuras de cima para baixo:



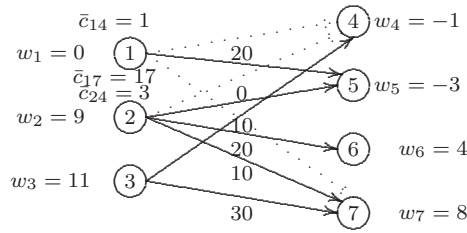
Notar que esse processo pode ser usado para qualquer problema de transportes equilibrado. Como referimos anteriormente, em cada iteração do método simplex há que calcular as variáveis duais w_i e os coeficientes de custo reduzidos associados às variáveis não básicas. Isso é feito segundo o processo explicado anteriormente, obtendo-se o seguinte grafo que contém toda essa informação



Como $\bar{c}_{34} < 0$, a solução dada não é ótima. Então o arco $(3, 4)$ forma um ciclo com os arcos da árvore geradora e acrescenta-se $\pm\theta$ a cada um dos arcos desse ciclo de modo a obter o seguinte grafo



Então $\theta = 10$ e o arco $(1, 4)$ é retirado do ciclo, entrando o arco $(3, 4)$ para a árvore. Actualizando os valores das variáveis básicas com acréscimo ou decréscimo de θ , obtemos uma nova solução básica admissível. Para verificar se essa solução é ótima há que calcular as variáveis duais associadas e os coeficientes de custo reduzidos das variáveis não básicas. Seguindo o processo usual obtém-se o seguinte grafo



Portanto $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para todas as variáveis não básicas ($(i, j) \notin J$). O algoritmo termina com a solução ótima

$$\bar{x}_{15} = 20, \quad \bar{x}_{25} = 0, \quad \bar{x}_{26} = 20, \quad \bar{x}_{27} = 20, \quad \bar{x}_{34} = 10, \quad \bar{x}_{37} = 30$$

$$\bar{x}_{14} = \bar{x}_{17} = \bar{x}_{24} = 0$$

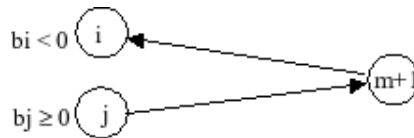
e o valor ótimo é

$$\bar{z} = \sum_{(i,j) \in J} c_{ij} \bar{x}_{ij} = 3 \times 20 + 12 \times 0 + 5 \times 20 + 1 \times 20 + 12 \times 10 + 3 \times 30 = 390$$

8 Fase I do Método Simplex para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo

A Fase I do método simplex é um processo para determinar uma primeira solução básica admissível, isto é, uma árvore geradora admissível.

Processo 1 – Conjunto Completo de Variáveis Artificiais Este processo consiste em introduzir um nó adicional ($m + 1$) e m arestas adicionais $(m + 1, i)$ ou $(j, m + 1)$ consoante $b_i < 0$ ou $b_j \geq 0$ respectivamente, de acordo com o seguinte esquema



Deste modo constitui-se numa rede alargada com $(m + 1)$ nós e $(n + m)$ arestas, onde m e n são os números de nós e de arestas da rede original. Além disso $b_{m+1} = 0$ para manter o problema equilibrado. Na Fase I resolve-se o problema de fluxo de custo mínimo

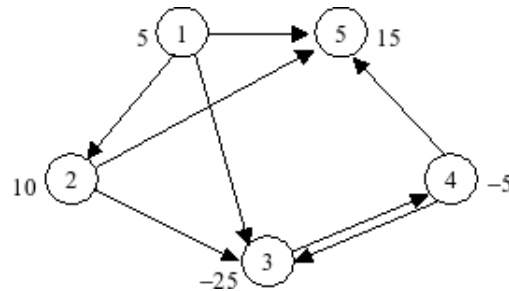
$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in F} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E \cup F} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E \cup F} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m + 1 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \cup F \end{aligned}$$

com F o conjunto das arestas acrescentadas. Como este problema é limitado, então tem solução ótima e há dois casos:

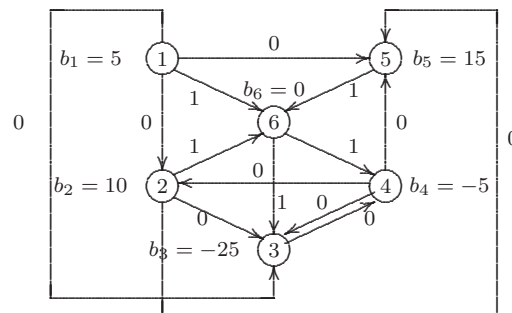
1. Se o valor ótimo é nulo, então obteve-se uma solução básica admissível para o problema de fluxo de custo mínimo original. Neste caso as arestas $(i, j) \in F$ e o nó $(m + 1)$ são suprimidos e o método simplex é iniciado com essa solução básica admissível.

2. Se o valor óptimo é positivo, então o problema de fluxo de custo mínimo original é inadmissível.

A título de exemplo, consideremos a rede



Então o problema de fluxo de custo mínimo correspondente à Fase I é representado no seguinte grafo



ou seja

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= x_{16} + x_{26} + x_{56} + x_{63} + x_{64} \\ \text{Sujeito a } &\sum_{j:(i,j) \in E'} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E'} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ &x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E' \end{aligned}$$

com E' o conjunto das arestas da rede alargada.

É importante notar que a construção do problema Fase I de fluxo de custo mínimo permite determinar uma primeira solução básica admissível associada ao conjunto J das arestas adicionais. Como

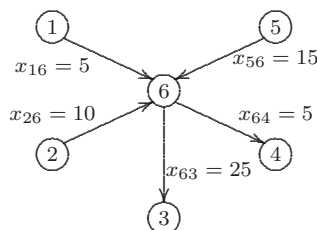
$$(i, m + 1) \in J \Leftrightarrow b_i \geq 0$$

$$(m + 1, i) \in J \Leftrightarrow b_i < 0$$

então os valores das variáveis básicas são

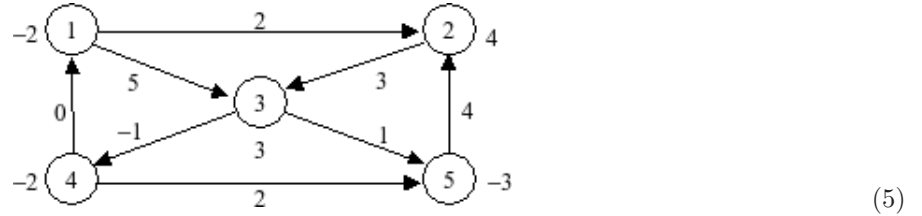
$$\begin{cases} x_{i,m+1} = b_i \\ x_{m+1,i} = -b_i \end{cases}$$

Essa solução é então dada pela seguinte árvore geradora

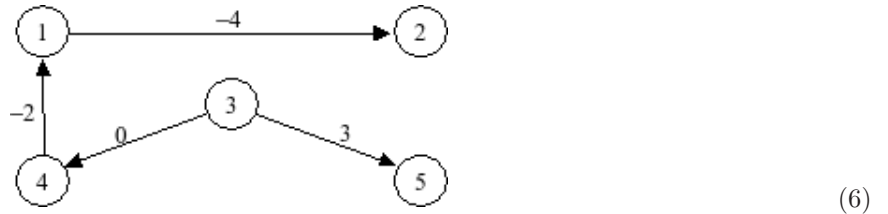


Este processo tem o inconveniente de requerer pelo menos m iterações para se obter uma solução admissível. O próximo processo procura aliviar esse esforço tirando partido de uma solução básica conhecida.

Processo 2 – Base (Árvore) Avançada Como referimos anteriormente, o algoritmo de Kruskal permite determinar uma árvore geradora (de custo mínimo ou não), isto é, uma solução básica para o problema de fluxo de custo mínimo. Se essa solução básica é admissível, isto é, se $x_{ij} \geq 0$ para todo $(i, j) \in E$, então pode ser usada como solução inicial do método simplex. Seguidamente iremos descrever um processo de obter uma solução básica admissível a partir de uma inadmissível. Consideremos o seguinte problema de fluxo de custo mínimo



A árvore geradora de custo mínimo é a seguir apresentada



onde os valores das variáveis básicas x_{ij} , $(i, j) \in J$, se calculam da maneira descrita na secção 2. Essa solução básica é não admissível, pois existem duas variáveis básicas negativas.

Tal como no processo anterior, introduzimos um nó adicional $(m + 1)$ com $b_{m+1} = 0$ e duas arestas $(m + 1, i)$ e $(j, m + 1)$ para cada componente negativa da solução básica, isto é, para cada $(i, j) \in J_-$, com

$$J_- = \{(i, j) : x_{ij} < 0\} \subseteq J \quad (7)$$

Deste modo é construída uma rede alargada $G' = (V', E')$ a partir da rede $G = (V, E)$ dada, onde

$$V' = V \cup \{m + 1\}, \quad E' = E \cup \{(j, m + 1), (m + 1, i) : (i, j) \in J_-\}$$

Seja F o conjunto associado às arestas acrescentadas, isto é

$$F = \{(j, m + 1), (m + 1, i) : (i, j) \in J_-\}$$

Então o processo Fase I, consiste em

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in F} x_{ij} \\ \text{Sujeito a} & \text{ restrições da rede alargada} \end{aligned} \quad (8)$$

Seguidamente, descrevemos um processo muito simples para determinar uma primeira solução básica admissível para este problema Fase I. Consideremos novamente a árvore inicial e a seguinte transformação:

$$\forall_{(i,j) \in J_-} x_{ij} = -\alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{ij} = 0 \\ x_{m+1,i} = \alpha \\ x_{j,m+1} = \alpha \end{cases} \quad (9)$$

É fácil de ver que esta solução é admissível para a rede alargada. Contudo, o nosso primeiro objectivo é a determinação de uma solução básica admissível para o problema Fase I. Para isso as variáveis x_{ij} , $(i, j) \in J_-$ que passaram a ter valor nulo devem ser tornadas não básicas. É fácil de ver que a solução é básica admissível para o problema Fase I se J_- tiver apenas um elemento. De outro modo, existe pelo menos um ciclo que tem de ser destruído de modo a se obter uma árvore. Tal é conseguido de um modo muito simples subtraindo e adicionando uma quantidade $\theta > 0$ às variáveis associadas com as arestas desse ciclo de forma a que uma dessas variáveis fique nula. Então essa variável é tornada não básica (e deixa de ser considerada) desfazendo o ciclo respectivo. Esse processo deve ser efectuado até ao desaparecimento de ciclos e uma solução básica admissível para o problema Fase I é obtida quando tal acontecer.

Para ilustrar este procedimento, consideremos novamente a rede (5) e a árvore apresentada em (6). Então

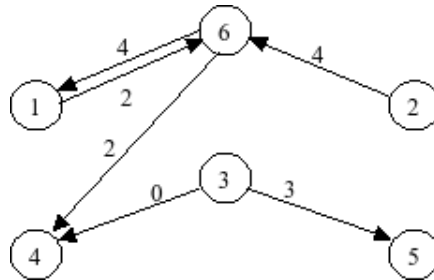
$$J_- = \{(4, 1), (1, 2)\}$$

e

$$F = \{(6, 4), (1, 6), (6, 1), (2, 6)\}$$

A rede alargada para o problema Fase I é constituída pela rede original, pelo nó adicional 6 e pelas arestas do conjunto F .

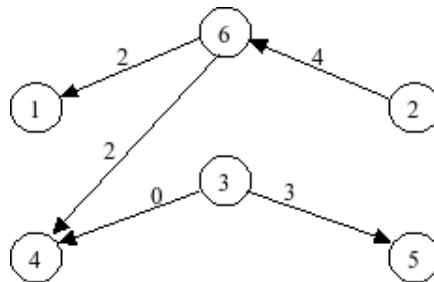
Como $|J_-| = 2$, então a primeira solução admissível, obtida de acordo com a transformação (9) e fazendo não básicas as variáveis $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in J_-$, não é básica e constitui o seguinte subgrafo



Para destruir o ciclo basta subtrair $\theta > 0$ a ambas as arestas de modo a que o fluxo aí existente seja não negativo. Então

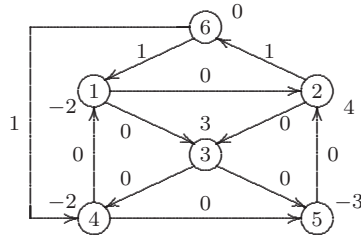
$$4 - \theta \geq 0, \quad 2 - \theta \geq 0$$

e portanto $\theta \leq 2$. Fazendo $\theta = 2$ a variável x_{16} fica nula e pode passar a não básica. Se tal acontecer obtemos a seguinte solução básica admissível para o problema Fase I (8):



(10)

Como $x_{16} = 0$, então $(1, 6)$ pode ser retirada do conjunto F , pelo que o problema Fase I de fluxo de custo mínimo é definido pela seguinte rede



À semelhança do processo 1, este problema de fluxo de custo mínimo seria resolvido pelo método simplex com início na solução básica admissível (10). A solução óptima deste problema fornece uma primeira solução básica admissível para o problema de fluxo de custo mínimo original.

A existência de apenas restrições de não negatividade permite desenvolver um processo de base avançada ainda mais simples e com um menor número de variáveis artificiais. Para isso basta notar que as restrições de conservação de fluxo se mantêm verdadeiras se se utilizar

$$\forall_{(i,j) \in J_-} x_{ij} = -\alpha \Rightarrow x_{ji} = \alpha \quad (11)$$

em vez da transformação (9). Deste modo é possível construir uma rede alargada com

$$F = \{(j, i) : (i, j) \in J_-\}$$

e sem qualquer nó adicional. Além disso uma solução básica admissível para esse problema Fase I alargado é fácil de obter e corresponde a

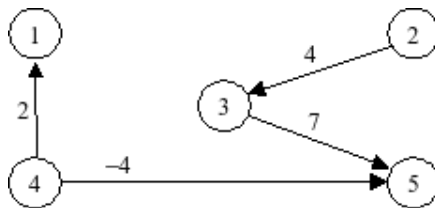
$$J - J_- \cup F.$$

onde J é o conjunto associado à árvore não admissível inicial e J_- é o conjunto definido por (7).

A título de exemplo, consideremos novamente o problema de fluxo de custo mínimo definido pela rede (5) e seja

$$J = \{(2, 3), (3, 5), (4, 5), (4, 1)\}$$

o conjunto de índices de uma solução básica (árvore). Se calcularmos os valores das variáveis x_{ij} , $(i, j) \in J$ obtemos a seguinte árvore:



Então

$$J_- = \{(4, 5)\}$$

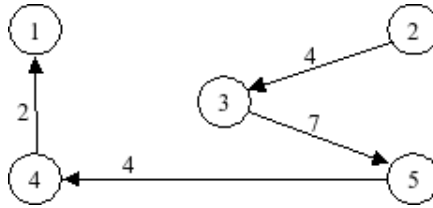
Usando a transformação (11), obtemos

$$F = \{(5, 4)\}$$

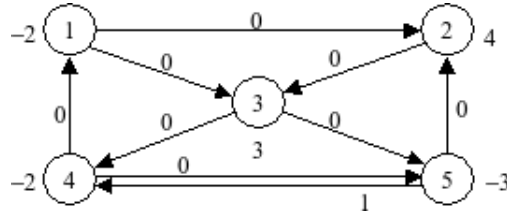
e a solução básica admissível para o problema alargado da Fase I

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in F} x_{ij} = x_{54} \\ \text{Sujeito a} & \text{ restrições da rede alargada} \end{aligned}$$

é dada por



Portanto o problema Fase I pode ser apresentado na seguinte rede:



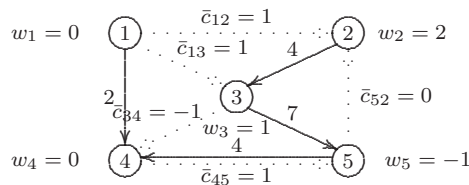
Para o resolver, consideramos a solução básica admissível anterior e calculamos as variáveis duais w_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, a partir de

$$w_i - w_j = c_{ij}, \quad \forall (i, j) \in J, \quad w_1 = 0$$

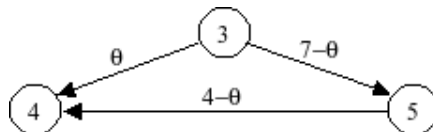
e os coeficientes de custo reduzido em relação à função da Fase I

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (w_i - w_j), \quad \forall (i, j) \in E - J$$

Esses valores são apresentados no seguinte grafo



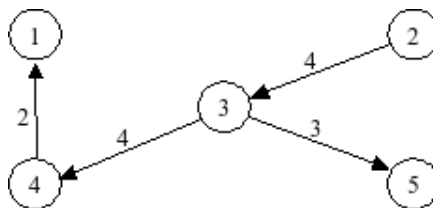
Então x_{34} é a variável não básica escolhida para passar a básica com valor θ . Para determinar θ , formamos o ciclo



Então θ tem de satisfazer

$$4 - \theta \geq 0, \quad 7 - \theta \geq 0$$

e portanto $\theta = 4$. A variável x_{54} passa a não básica com valor nulo e assim termina a Fase I com a solução básica admissível dada pela seguinte árvore



Essa seria a solução inicial para a aplicação do método simplex à resolução do problema de fluxo de custo mínimo apresentado em (5).

9 Método M-Grande

Este processo procura juntar as duas fases do método simplex, de modo a determinar a solução óptima do programa original a partir da resolução de um problema alargado. Tal como nos processos da Fase I discutidos na secção anterior, uma solução básica é primeiramente determinada. Se para a obter foi necessário alargar a rede, então o conjunto F definido na secção anterior é não vazio e o problema de fluxo de custo mínimo a resolver tem a forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + M \sum_{(i,j) \in F} x_{ij} \\ \text{Sujeito a} & \quad \text{restrições da rede alargada} \end{aligned} \quad (12)$$

Esse problema é definido pela rede alargada obtida da original por acréscimo das arestas $(i, j) \in F$, às quais se atribui o custo $M > 0$, e possivelmente um nó adicional $(m + 1)$. Esta quantidade M deve ser positiva e muito grande em comparação com os restantes coeficientes de custo. Devido à grandeza de M , e porque se trata de um problema de minimização, o método simplex começa por anular todas as variáveis x_{ij} associadas a $(i, j) \in F$. Sempre que uma variável x_{ij} , $(i, j) \in F$, se anula, a aresta (i, j) deve ser suprimida da rede alargada e o processo continua com o conjunto F actualizado. Assim, na solução óptima obtida pelo método simplex há dois casos possíveis:

1. $F \neq \emptyset$ e $x_{ij} > 0$ para certo $(i, j) \in F$ e o problema de fluxo de custo mínimo é não admissível.
2. $F = \emptyset$ ou $x_{ij} = 0$ para todo $(i, j) \in F$ e a solução óptima do problema alargado é também óptima para o problema original.

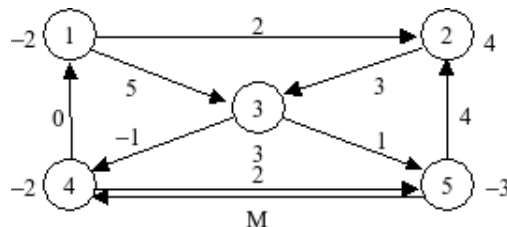
A título de exemplo, consideremos novamente o problema de fluxo de custo mínimo definido pela rede (5). Como vimos anteriormente, ao aplicarmos o processo base avançada com a transformação (11) ao conjunto

$$J = \{(2, 3), (3, 5), (4, 5), (4, 1)\}$$

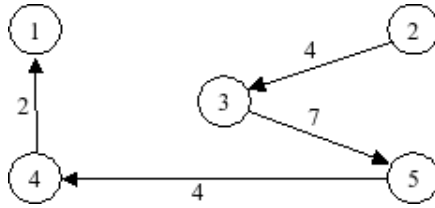
obtém-se $J_- = \{(4, 5)\}$ e portanto:

$$F = \{(5, 4)\}$$

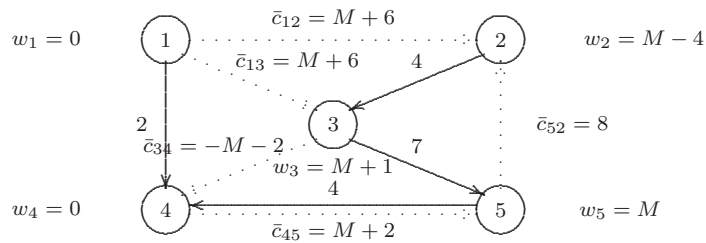
A rede alargada para o método M-grande tem a forma



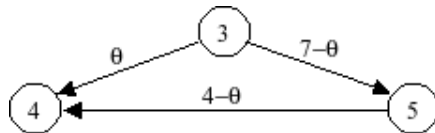
A solução básica admissível inicial é, como vimos na secção anterior, dada por



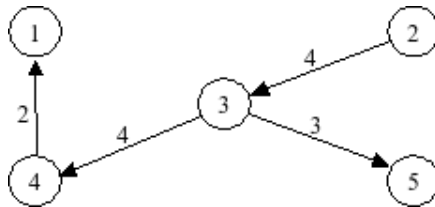
O método simplex é agora aplicado ao problema de fluxo alargado com esta solução básica admissível inicial. Então as variáveis duais w_i , $i = 1, \dots, 5$ e os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} , $(i, j) \in E - J$ são calculados como anteriormente (em relação à rede alargada) e tem-se



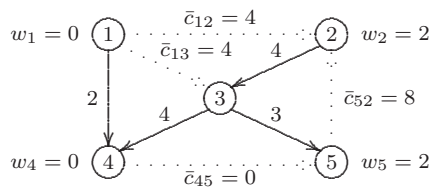
Então x_{34} passa a básica e forma-se o ciclo



Donde $\theta = 4$ e obtém-se a nova solução básica admissível



Então x_{54} passou a não básica, pelo que a aresta $(5, 4)$ correspondente a essa variável artificial deve ser suprimida e o método simplex passa a resolver o problema de fluxo original. Então calculam-se as variáveis duais w_i , $i = 1, \dots, 5$ e os coeficientes de custos reduzidos \bar{c}_{ij} , $(i, j) \in E$ (arestas originais apenas) e tem-se



Portanto $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para todos $(i, j) \in E - J$ e a solução é ótima.

10 Tratamento de Desigualdades

Consideremos um problema de fluxo de custo mínimo com m nós e n arestas numa rede $G = (V, E)$ em que $p \leq m$ restrições de conservação de fluxo são desigualdades, isto é, da forma

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} \leq b_i$$

ou

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} \geq b_i$$

Tal como em programação linear sem estrutura de redes, as desigualdades devem ser transformadas em igualdades por introdução de variáveis de folga. Dada a estrutura especial do problema de redes, isso é conseguido introduzindo um nó adicional ($m + 1$) para todas as p desigualdades e p arestas, uma para cada desigualdade, tais que

$$(i, m + 1) \leftrightarrow \leq$$

$$(m + 1, i) \leftrightarrow \geq$$

Além disso a introdução de um nó adicional implica o acréscimo de uma igualdade correspondente a esse nó. O valor b_{m+1} deve ser

$$b_{m+1} = -\sum_{i=1}^m b_i$$

de modo a que o problema fique equilibrado. Os coeficientes de custo associados às variáveis de folga devem ser nulos.

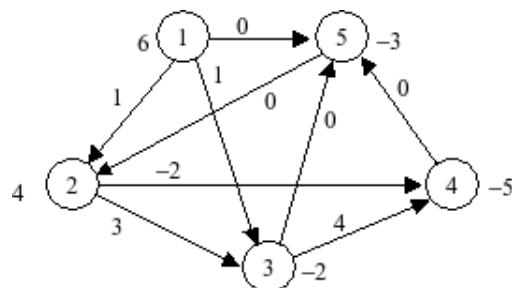
A título de exemplo consideremos o problema

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = & x_{12} + x_{13} + 3x_{23} - 2x_{24} + 4x_{34} \\ \text{Sujeito a} & \quad x_{12} + x_{13} \leq 6 \\ & -x_{12} + x_{23} + x_{24} \geq 4 \\ & \quad -x_{13} - x_{23} + x_{34} \leq -2 \\ & \quad \quad -x_{24} - x_{34} \leq -5 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

Como o problema contém 3 desigualdades \leq e uma desigualdade \geq , então há que introduzir três variáveis de folga x_{15} , x_{35} e x_{45} (com sinal +) e uma variável de folga x_{52} (com sinal -). A introdução do nó 5 vai implicar uma nova restrição de igualdade respeitante a esse nó. Como todos os coeficientes de custo associados às variáveis de folga são nulos e

$$b_5 = -(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = -3$$

então a rede associada ao problema de fluxo equivalente ao problema dado é:



O problema tem a forma

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Minimize } z = & x_{12} + x_{13} + 3x_{23} - 2x_{24} + 4x_{34} & \\
 \text{Sujeito a} & x_{12} + x_{13} + x_{15} & = 6 \\
 & -x_{12} & + x_{23} + x_{24} & - x_{52} = 4 \\
 & & -x_{13} & - x_{23} & + x_{34} + x_{35} & = -2 \\
 & & & -x_{24} - x_{34} & + x_{45} & = -5 \\
 & & & & -x_{35} - x_{45} + x_{52} & = -3 \\
 & x_{ij} \geq 0, & (i, j) \in E & & &
 \end{array}$$

Tal como em programação linear usual, este problema é resolvido com o método simplex. Se na solução óptima obtida uma variável de folga é positiva, então a oferta ou a procura não é esgotada no nó respectivo.

11 Problemas Não Equilibrados

Um problema de fluxo de custo mínimo é *Não Equilibrado* se

$$\sum_{i=1}^m b_i \neq 0$$

com m o número de nós da rede. Esse problema fica equilibrado com a introdução de um nó adicional ($m+1$) e m arestas a ligar esse nó com todos os nós da rede original. Dois casos podem acontecer e são apresentados a seguir

1. Se $\sum_{i=1}^m b_i < 0$, então

$$b_{m+1} = -\sum_{i=1}^m b_i > 0$$

e ($m+1$) deve ser nó origem em todas as arestas, ou seja, devem-se acrescentar m arestas ($m+1, i$) com coeficientes de custo $c_{m+1,i} = 0$.

2. Se $\sum_{i=1}^m b_i > 0$, então

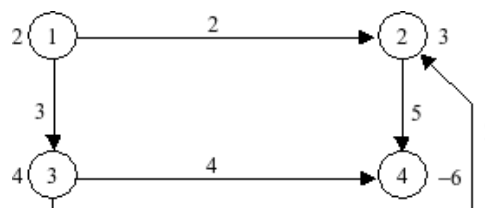
$$b_{m+1} = -\sum_{i=1}^m b_i < 0$$

e ($m+1$) deve ser nó terminal das m arestas adicionais ($i, m+1$) que têm associados custos nulos $c_{i,m+1} = 0$.

Em ambos os casos o problema fica equilibrado e pode ser resolvido pelo método simplex. Seja $\bar{x} = [\bar{x}_{ij}]$ a solução óptima do problema alargado. Então:

1. Se $\bar{x}_{i,m+1} > 0$, o nó i armazena $\bar{x}_{i,m+1}$ e não esgota a oferta.
2. Se $\bar{x}_{m+1,i} > 0$, o nó i armazena $\bar{x}_{m+1,i}$ e não esgota a procura.

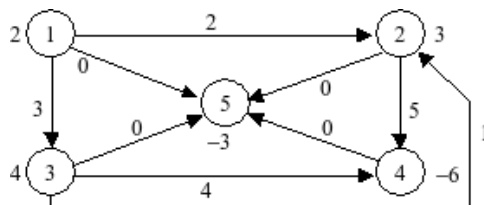
Para ilustração deste processo, consideremos o problema de fluxo associado à seguinte rede



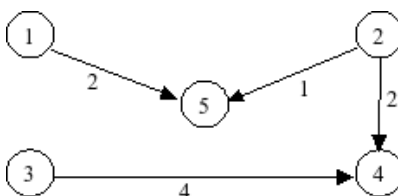
Como

$$\sum_{i=1}^4 b_i = 3 > 0$$

introduz-se o nó 5 e as arestas $(i, 5)$, $i = 1, 2, 3, 4$ com coeficientes de custo nulos. Além disso $b_5 = -3$ de modo a constituir um problema de fluxo equilibrado associado à seguinte rede



A solução óptima deste problema é dada pela árvore



Assim tem-se a seguinte distribuição óptima

- Nó 1 – Armazena 2.
- Nó 2 – Armazena 1 e envia 2 para o nó 4.
- Nó 3 – Envia 4 para o nó 4.
- Nó 4 – Recebe 4 do nó 3 e 2 do nó 2.

12 Problemas de Fluxo com Limites Inferiores e Superiores (Capacidades)

Este tipo de problema difere do problema de fluxo de custo mínimo normal na existência de limites inferiores (nulos ou não nulos) e limites superiores nos valores das variáveis e tem por isso a forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

onde $G = (V, E)$ é o grafo do problema e $V = \{1, \dots, m\}$. O método simplex para tratamento deste tipo de programas lineares deve ser convenientemente implementado de modo a processar este problema. Para isso, e à semelhança da forma normal simples, é necessário definir uma solução básica (admissível ou não) para o problema. Seja n o número de arestas da rede G e m o seu número de nós.

Definição de Solução Básica Consideremos o grafo $G = (V, E)$ e três subconjuntos L, U e J de E tais que

$$\begin{cases} E = L \cup U \cup J \\ L \cap U = L \cap J = U \cap J = \emptyset \\ \text{As arestas de } J \text{ formam uma árvore geradora} \end{cases}$$

Então a *Solução Básica* para o problema de fluxo satisfaz as restrições de conservação de fluxo com

$$x_{n+1} = 0$$

$$x_{ij} = \begin{cases} l_{ij} & \text{se } (i, j) \in L \\ u_{ij} & \text{se } (i, j) \in U \\ \bar{x}_{ij} & \text{se } (i, j) \in J \end{cases}$$

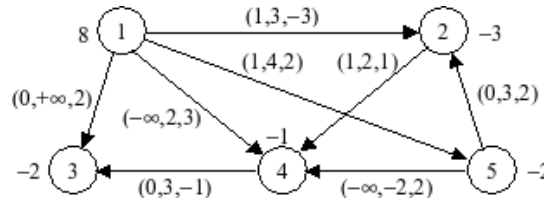
onde \bar{x}_{ij} se obtém univocamente a partir das arestas da árvore geradora após fixação das variáveis x_{ij} , com $(i, j) \in L \cup U$. As variáveis x_{ij} com $(i, j) \in L \cup U$ dizem-se *Não Básicas*, enquanto que as restantes são denominadas *Básicas*. À semelhança da forma normal simples, a variável x_{n+1} nunca é considerada no tratamento das soluções básicas, por assumir o valor nulo em qualquer solução básica.

Uma solução básica diz-se *Admissível* se

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \text{ para todo } (i, j) \in J.$$

Se tal não acontecer diz-se *Não Admissível*.

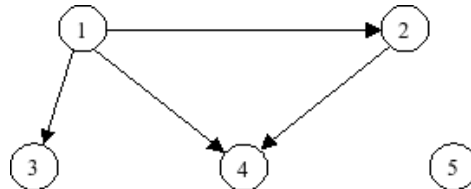
A título de exemplo, consideremos o problema de fluxo com limites dado pela rede, onde em cada aresta (i, j) o terno ordenado representa (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) .



Como primeiro exemplo, seja

$$J = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (1, 3)\}, \quad L = \{(4, 3), (5, 4), (5, 2)\}, \quad U = \{(1, 5)\}.$$

Então $|J|$ tem $4=m-1$ arestas, mas não forma uma árvore geradora, pois essas arestas constituem o grafo:

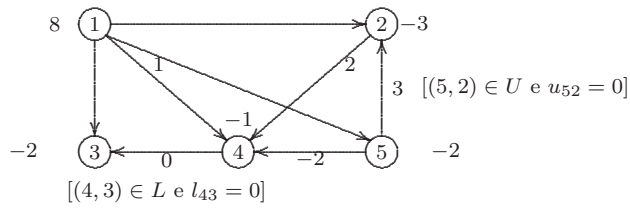


Portanto não há uma solução básica associada a esses conjuntos.

Como segundo exemplo, consideremos a seguinte partição de E :

$$J = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}, \quad L = \{(4, 3)\}, \quad U = \{(2, 4), (5, 2), (5, 4)\}.$$

Então o grafo associado a J constitui uma árvore. Se acrescentarmos os arcos não básicos $(i, j) \in L \cup U$, tem-se



Para determinar os valores das variáveis básicas, escrevemos as equações de conservação de fluxo em cada um dos nós a partir de um nó folha e após fixação das variáveis não básicas:

$$\text{Nó 2} \rightarrow -x_{12} + x_{24} - x_{52} = -3 \Rightarrow x_{12} = 3 + 2 - 3 = 2$$

$$\text{Nó 1} \rightarrow +x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 8$$

$$\text{Nó 3} \rightarrow -x_{13} - x_{43} = -2 \Rightarrow x_{13} = 2 - 0 = 2$$

$$\text{Nó 4} \rightarrow -x_{14} - x_{24} - x_{54} + x_{43} = -1 \Rightarrow x_{14} = 1 - 2 + 2 + 0 = 1$$

$$\text{Nó 5} \rightarrow +x_{52} + x_{54} - x_{15} = -2 \Rightarrow x_{15} = 2 + 3 - 2 = 3$$

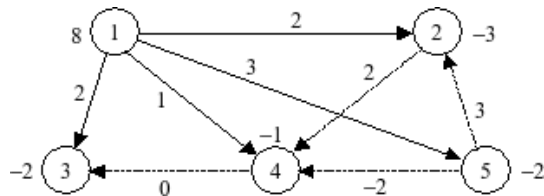
Portanto as variáveis básicas têm os seguintes valores

$$x_{12} = 2, \quad x_{13} = 2, \quad x_{14} = 1, \quad x_{15} = 3.$$

Como

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \text{ para todo } (i, j) \in J.$$

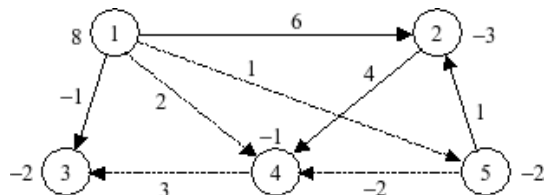
então a solução básica é admissível e é representada pela seguinte rede:



Consideremos finalmente os conjuntos

$$J = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 2)\}, \quad L = \{(1, 5)\}, \quad U = \{(1, 4), (4, 3), (5, 4)\}$$

Procedendo como anteriormente, obtém-se a solução básica



Essa solução é não admissível, pois há pelo menos uma variável básica com valor \bar{x}_{ij} que não pertence ao respectivo intervalo $[l_{ij}, u_{ij}]$ (por exemplo $x_{12} = 6 > u_{12}$).

13 Método Simplex para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo com Limites

Este problema de fluxo de custo mínimo pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \geq l_{ij}, \quad (i,j) \in E \\ & x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i,j) \in E \end{aligned}$$

O seu dual é então

$$\begin{aligned} \text{Maximize } z &= \sum_{i=1}^m b_i w_i + \sum_{(i,j) \in E} (l_{ij} z_{ij} - u_{ij} v_{ij}) \\ \text{Sujeito a } & w_i - w_j + z_{ij} - v_{ij} = c_{ij}, \quad (i,j) \in E \\ & z_{ij} \geq 0, \quad v_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in E \end{aligned}$$

Se $x = [x_{ij}]$ é uma solução básica admissível associada aos conjuntos L , U e J definidos na secção anterior, então pelo teorema da complementaridade das variáveis de folga, tem-se

$$\begin{aligned} (i,j) \in J &\Rightarrow z_{ij} = v_{ij} = 0 \Rightarrow w_i - w_j = c_{ij} \\ (i,j) \in L &\Rightarrow v_{ij} = 0 \Rightarrow z_{ij} = c_{ij} - (w_i - w_j) \\ (i,j) \in U &\Rightarrow z_{ij} = 0 \Rightarrow v_{ij} = -(c_{ij} - (w_i - w_j)) \end{aligned}$$

Tal como para a forma normal, as variáveis duais w_i , $i = 1, \dots, m$, podem ser calculadas a partir de

$$w_i - w_j = c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in J.$$

Essa solução será dual admissível se $z_{ij} \geq 0$ e $v_{ij} \geq 0$ para todos $(i,j) \in E$. Devido às implicações anteriores, isso acontece se

$$\forall_{(i,j) \in L} \bar{c}_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall_{(i,j) \in U} \bar{c}_{ij} \leq 0 \tag{13}$$

onde, tal como anteriormente,

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (w_i - w_j).$$

Se a solução dual $w = (w_i) \in \mathbb{R}^m$ é dual admissível, então a solução básica admissível é óptima e o processo termina. De outro modo, seja $(r,s) \in E$ uma aresta associada a

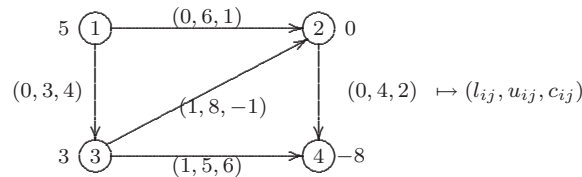
$$|\bar{c}_{rs}| = \max \{ |\bar{c}_{ij}| : ((i,j) \in L \text{ e } \bar{c}_{ij} < 0) \text{ ou } ((i,j) \in U \text{ e } \bar{c}_{ij} > 0) \} \tag{14}$$

Dois casos podem acontecer:

1. Se $(r,s) \in L$, a variável x_{rs} deve aumentar o seu valor de l_{rs} para $(l_{rs} + \theta)$, com $\theta > 0$. À semelhança da forma normal simples, forma-se um ciclo, que se desfaz de acordo com o processo explicado. Se tal não é possível, então $\theta \rightarrow +\infty$ e o programa é ilimitado.
2. Se $(r,s) \in U$, então x_{rs} deve diminuir o seu valor para $(u_{rs} - \theta)$, com $\theta > 0$. Tal como antes, um ciclo é formado e desfeito, ou então o programa é ilimitado.

Notar ainda que pode acontecer que uma variável passe de um limite para o outro sem provocar nenhuma mudança nos índices das variáveis básicas. Após estas alterações obtém-se uma nova solução admissível. O método simplex vai assim obtendo soluções básicas (árvores geradoras) admissíveis com valores da função decrescentes até à obtenção de uma solução óptima que satisfaz o critério de optimalidade (13).

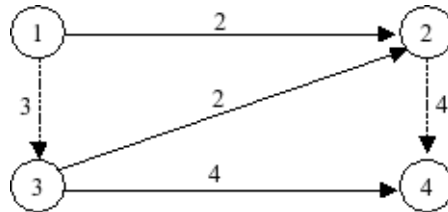
Como exemplo de ilustração, consideremos o problema de fluxo de custo mínimo com limites representado pela rede



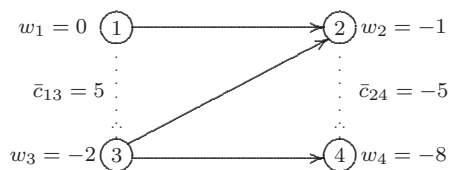
Seja a solução básica admissível inicial definida pelos conjuntos de índices

$$L = \emptyset, \quad U = \{(1, 3), (2, 4)\}, \quad J = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4)\}$$

Então obtém-se a seguinte rede associada a essa solução:



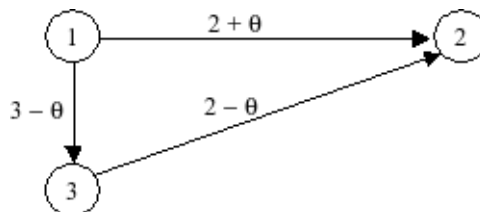
Podemos agora calcular as variáveis duais w_i e os coeficientes de custo reduzidos exactamente da mesma forma que fizemos para o caso normal e esses valores são apresentados a seguir:



Então o critério de optimalidade (13) não é satisfeito e

$$(r, s) = (1, 3)$$

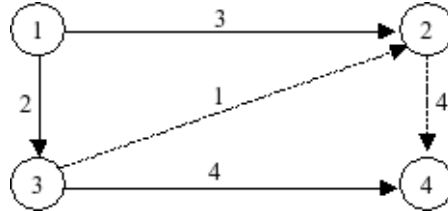
A variável x_{13} tem de diminuir o seu valor de $u_{13} = 3$ para $(3 - \theta)$. Para determinar esse valor de θ forma-se o ciclo



e tem-se:

$$\theta \geq 0; \quad 2 + \theta \leq 6; \quad 3 - \theta \geq 0; \quad 2 - \theta \geq 1.$$

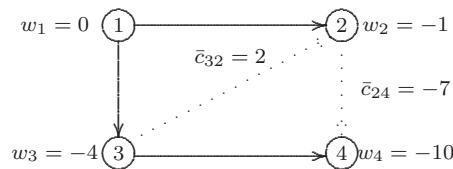
Portanto $\theta = 1$ e a variável x_{32} passa a não básica com valor igual ao seu limite inferior $l_{32} = 1$. Então a nova solução básica admissível é dada pelo seguinte grafo



isto é,

$$L = \{(3, 2)\}, \quad U = \{(2, 4)\}, \quad J = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$$

Se agora calcularmos a solução dual w e os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} referentes às variáveis não básicas, vem



Então o critério de optimalidade é verificado e a solução é ótima.

14 Determinação de uma Solução Básica Admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo com Limites

Processo 1 – Conjunto Completo de Variáveis Artificiais Seja $\bar{x} = [\bar{x}_{ij}]$ uma solução tal que

$$\bar{x}_{ij} = l_{ij} \text{ ou } \bar{x}_{ij} = u_{ij} \text{ para todos } (i, j) \in E$$

Para cada nó $i = 1, \dots, m$, calculam-se

$$\bar{b}_i = b_i - \sum_{j:(i,j) \in E} \bar{x}_{ij} + \sum_{j:(j,i) \in E} \bar{x}_{ji}.$$

O processo consiste em introduzir um nó adicional $(m + 1)$ e m arestas $(i, m + 1)$ ou $(m + 1, i)$ dependendo do sinal de \bar{b}_i . Assim, tem-se

$$\begin{cases} \bar{b}_i \geq 0 \Rightarrow \text{aresta } (i, m + 1) \text{ é introduzida } (l_{i,m+1} = 0, u_{i,m+1} = \infty) \\ \bar{b}_i < 0 \Rightarrow \text{aresta } (m + 1, i) \text{ é introduzida } (l_{m+1,i} = 0, u_{m+1,i} = \infty) \end{cases}.$$

Se F é o conjunto das arestas introduzidas, então F é o conjunto das variáveis básicas de uma solução básica admissível para o problema de fluxo de custo mínimo alargado. Os problemas Fase I ou M-grande respectivos são a seguir apresentados:

Fase I:

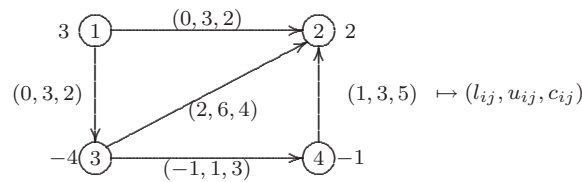
$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in F} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E \cup F} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E \cup F} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m+1 \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i,j) \in E \cup F \end{aligned}$$

M-grande:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + M \sum_{(i,j) \in F} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E \cup F} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E \cup F} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m+1 \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i,j) \in E \cup F \end{aligned}$$

Esses problemas podem ser resolvidos pelo método simplex descrito na secção anterior. No primeiro caso, o algoritmo termina com uma solução básica admissível para o problema de fluxo original ou indica que esse problema é não admissível. No caso do método M-grande o algoritmo termina numa solução óptima do problema original se essa solução existir. Notar que, tal como na forma normal, as arestas $(i,j) \in F$ devem ser suprimidas sempre que as variáveis correspondentes x_{ij} passem a não básicas.

Como exemplo de ilustração, consideremos o problema definido pela seguinte rede:



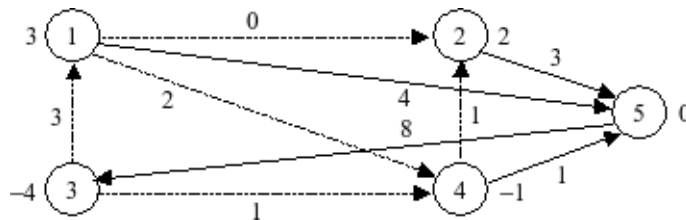
Seja \bar{x} definido por

$$\bar{x}_{12} = 0; \quad \bar{x}_{31} = 3; \quad \bar{x}_{34} = 1; \quad \bar{x}_{42} = 1; \quad \bar{x}_{14} = 2.$$

Então:

$$\begin{cases} \bar{b}_1 = b_1 - (\bar{x}_{12} + \bar{x}_{14}) + \bar{x}_{31} = 3 - (0 + 2) + 3 = 4 \\ \bar{b}_2 = b_2 + (\bar{x}_{12} + \bar{x}_{42}) = 2 + 0 + 1 = 3 \\ \bar{b}_3 = b_3 - (\bar{x}_{31} + \bar{x}_{34}) = -4 - (3 + 1) = -8 \\ \bar{b}_4 = b_4 - \bar{x}_{42} + \bar{x}_{14} + \bar{x}_{34} = -1 - 1 + 2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Tendo em conta estes valores de \bar{b}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, obtém-se a seguinte solução básica admissível para o problema alargado:



Então

$$F = \{(1, 5), (2, 5), (5, 3), (4, 5)\}$$

e a primeira solução básica admissível para a rede alargada tem conjuntos de índices

$$J = F, \quad L = \{(1, 2), (1, 4), (4, 2)\}, \quad U = \{(3, 1), (3, 4)\}$$

Processo 2 – Base (Árvore Geradora) Avançada Consideremos uma solução básica do problema de fluxo de custo mínimo associado aos conjuntos de índices L , U e J . Se

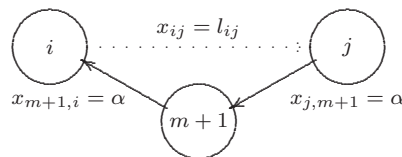
$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \text{ para todo } (i, j) \in J$$

então a solução básica é admissível e pode ser usada como solução inicial para o método simplex. Se isso não acontecer, então tem de existir um índice $(i, j) \in J$ tal que

$$x_{ij} < l_{ij} \text{ ou } x_{ij} > u_{ij}$$

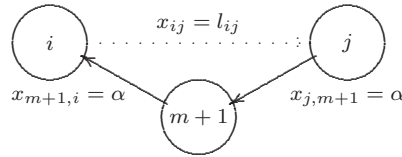
Nesse caso introduz-se um nó $(m + 1)$ e duas arestas que ligam esse nó e os nós i e j de acordo com os seguintes esquemas:

1. $x_{ij} < l_{ij} \Rightarrow x_{ij} = l_{ij} - \alpha, \alpha > 0$



Além disso os limites inferiores e superiores nas duas arestas adicionais são 0 e ∞ respectivamente.

2. $x_{ij} > u_{ij} \Rightarrow x_{ij} = u_{ij} + \alpha, \alpha > 0$



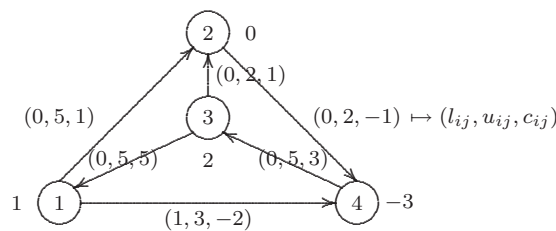
Como anteriormente, os limites inferiores e superiores nas novas arestas são 0 e ∞ respectivamente.

O processo base avançada é semelhante ao apresentado para a forma normal. O número de arestas adicionais é $2p$, com p o número de elementos do conjunto

$$J_- = \{(i, j) \in J : x_{ij} < l_{ij} \text{ ou } x_{ij} > u_{ij}\} \quad (15)$$

enquanto que apenas o nó $(m + 1)$ é usado para formar a rede alargada. Se $|J_-| = 1$, então obtém-se imediatamente uma solução básica admissível. De outro modo uma tal solução é obtida por um processo semelhante ao da forma normal e é a solução inicial para aplicação do método simplex à resolução do problema *Fase I* de fluxo ou ao problema M-grande.

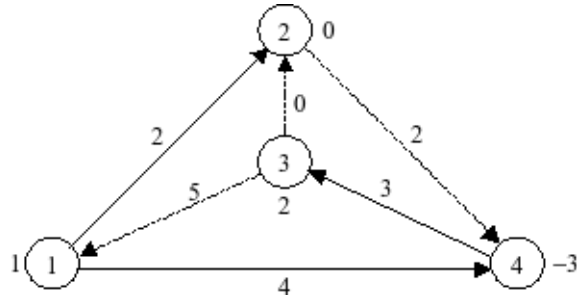
Como exemplo de ilustração da base avançada, consideramos o problema de fluxo associado com a seguinte rede



Consideremos ainda a solução básica associada aos conjuntos

$$L = \{(3, 2)\}, \quad U = \{(2, 4), (3, 1)\}, \quad J = \{(1, 2), (1, 4), (4, 3)\}$$

ou seja,



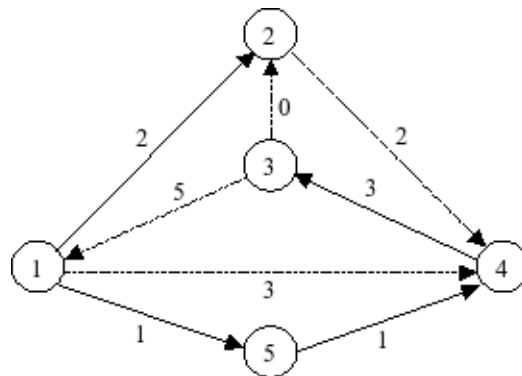
Essa solução não é admissível, pois

$$x_{14} = 4 > u_{14} = 3.$$

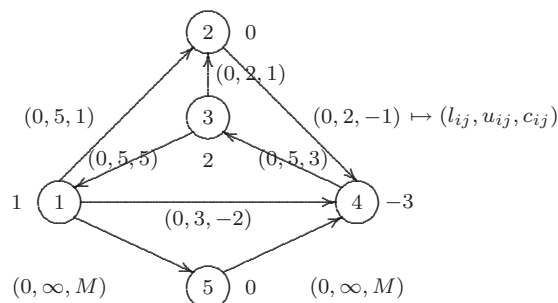
É por isso necessário introduzir o nó 5 e duas arestas (5, 4) e (1, 5). Além disso, como

$$x_{41} = u_{41} + 1$$

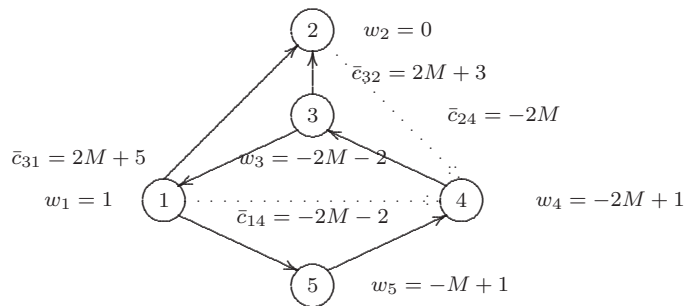
então uma primeira solução admissível para a rede alargada é dada pelo seguinte grafo



Essa solução é básica, pois J tem apenas um elemento, e pode por isso ser a solução inicial para a resolução do problema M-grande associado à rede alargada apresentada a seguir



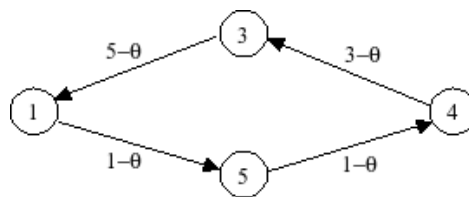
Na primeira iteração da aplicação do método simplex à resolução desse problema, calculam-se as variáveis duais w_i , $i = 1, \dots, 5$ e os coeficientes de custo reduzidos associados às variáveis não básicas da solução básica admissível inicial:



Então x_{31} é a variável não básica escolhida a passar a básica, pois

$$(3, 1) \in U \text{ e } \bar{c}_{31} = 2M + 5 > 0.$$

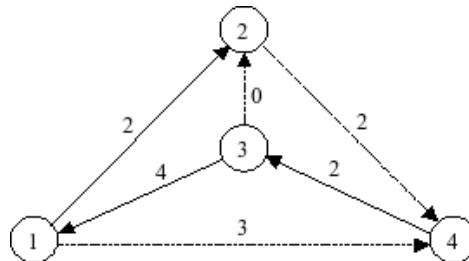
Para determinar a variável básica que troca de estatuto com x_{31} , forma-se o ciclo



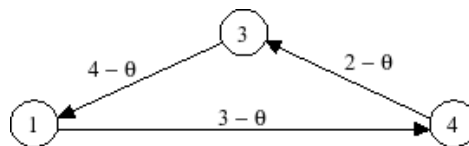
Então θ deve ser escolhido como o maior valor não negativo que satisfaz

$$1 - \theta \geq 0; \quad 1 - \theta \geq 0; \quad 3 - \theta \geq 0; \quad 5 - \theta \geq 0.$$

Donde $\theta = 1$ e as duas arestas $(1, 5)$ e $(5, 4)$ podem ser suprimidas assim como o nó 5. Deste modo obtém-se a seguinte solução básica admissível para o problema de fluxo original:



Na segunda iteração do método simplex, calculam-se novamente as variáveis duais w_i e os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} para as variáveis não básicas. Mas $\bar{c}_{14} = 6$ e como $(1, 4) \in U$, então a variável x_{14} vai passar a básica. Para determinar a variável básica que irá passar a não básica por troca com x_{14} forma-se o ciclo

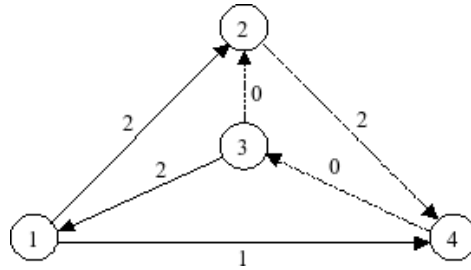


Então θ deve ser o maior valor não negativo que satisfaz

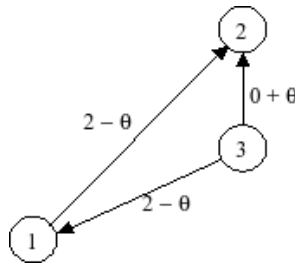
$$3 - \theta \geq 0; \quad 2 - \theta \geq 0; \quad 4 - \theta \geq 0.$$

Donde $\theta = 2$ e x_{43} troca com x_{14} (notar que x_{14} poderia também manter-se não básica com valor igual ao seu limite inferior, não alterando dessa maneira as variáveis básicas).

A nova solução básica é dada pela rede



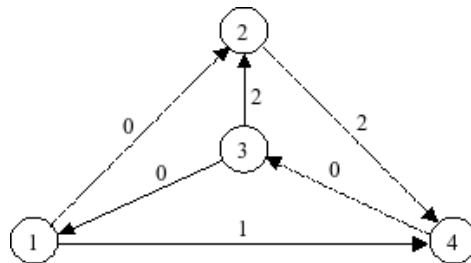
Calculando novamente as variáveis duais ($w = (1, 0, 6, 3)$) e os coeficientes de custo reduzidos associados às variáveis não básicas, obtém-se $\bar{c}_{32} = -5$, $\bar{c}_{24} = 2$, $\bar{c}_{43} = 0$. Então a variável x_{32} deve passar a básica. Para determinar a variável básica que troca com x_{32} forma-se o ciclo



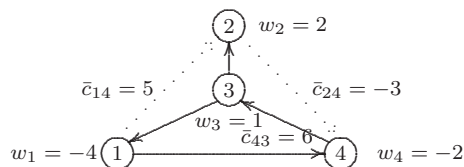
O valor θ é determinado como o maior número não negativo que satisfaz

$$0 + \theta \leq 2; \quad 2 - \theta \geq 0; \quad 2 - \theta \geq 0.$$

Então $\theta = 2$ e a variável x_{12} pode passar a não básica com valor zero (igual ao seu limite inferior). Assim obtém-se a nova solução básica admissível



Na nova iteração calculam-se as variáveis duais $w_i, i = 1, \dots, 4$ e os coeficientes de custo reduzidos associados às variáveis não básicas:



Então o critério de optimalidade (13) é satisfeito e a solução é ótima.

15 Formulação do Problema do Caminho Mais Curto como Problema de Fluxo de Custo Mínimo

Seja dada uma rede $G = (V, E)$ com m nós, em que cada aresta $(i, j) \in E$ tem associada um custo c_{ij} . O *Problema do Caminho Mais Curto* entre dois nós s e t procura determinar o caminho com menor custo entre esses nós. Para obter a sua formulação matemática, consideram-se as variáveis x_{ij} :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in C \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin C \end{cases}$$

onde C é o caminho mais curto procurado. A formulação tem então a forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

onde as componentes b_i são dadas por

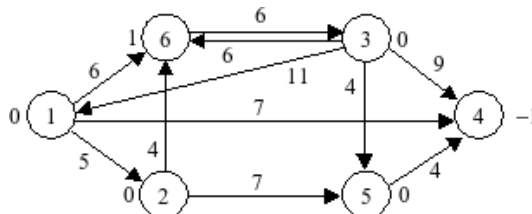
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \\ -1 & \text{se } i = t \end{cases}.$$

Consideremos o problema de fluxo de custo mínimo obtido do programa anterior substituindo as restrições de integralidade $x_{ij} \in \{0, 1\}$ por $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Esse programa tem solução óptima, que é uma solução básica admissível das restrições

$$\begin{aligned} \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 \leq x_{ij} &\leq 1, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

Como vimos anteriormente a matriz base associada às variáveis básicas pode ser permutada de forma a transformar-se em triangular superior com elementos diagonais iguais a ± 1 . Então as condições de integridade são satisfeitas, o que demonstra que a solução óptima do programa linear de fluxo de custo mínimo é a solução do caminho mais curto entre os nós s e t . Como esse programa linear é admissível e limitado, então o problema do caminho mais curto entre dois pares de nós tem sempre solução.

Assim por exemplo o caminho mais curto entre os nós 6 e 4 do grafo



é exactamente o problema de fluxo de custo mínimo apresentado nessa rede e que pode ser escrito na seguinte

forma

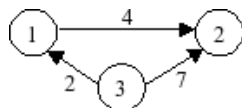
$$\begin{array}{rcll}
 \text{Minimize} & 5x_{12} + 7x_{14} + 6x_{16} + 7x_{25} + 4x_{26} + 11x_{31} + 9x_{34} + 4x_{35} + 6x_{36} + 4x_{54} + 6x_{63} & & \\
 \text{Sujeito a} & x_{12} + x_{14} + x_{16} & - x_{31} & = 0 \\
 & -x_{12} & + x_{25} + x_{26} & = 0 \\
 & & x_{31} + x_{34} + x_{35} + x_{36} & - x_{63} = 0 \\
 & -x_{14} & - x_{34} & - x_{54} = -1 \\
 & & -x_{25} & - x_{35} + x_{54} = 0 \\
 & -x_{16} & - x_{26} & - x_{36} + x_{63} = 1 \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq 1, & (i, j) \in E &
 \end{array}$$

O problema de fluxo de custo mínimo correspondente ao caminho mais curto entre dois nós s e t pode ser resolvido pelo método simplex. Este processo encontra no entanto algumas dificuldades para processar o problema de fluxo devido à degenerescência das soluções básicas. Por outro lado se se pretender determinar outro caminho mais curto entre s e um nó $r \neq t$, então tem que se resolver um problema de fluxo diferente em que a solução óptima do primeiro problema não é admissível para o segundo.

Na prática é desejável determinar todos os caminhos mais curtos entre um dado nó e todos os restantes nós da rede. O método simplex não é, pelas razões invocadas, usado para resolver o problema do caminho mais curto, sendo substituído nessa aplicação pelo algoritmo Dijkstra, que será discutido na secção seguinte. Notemos que este último algoritmo só pode ser usado em redes com coeficientes de custo c_{ij} não negativos, enquanto que essa exigência não é partilhada pelo método simplex.

16 Resolução do Problema do Caminho Mais Curto

O *Algoritmo de Dijkstra* é um processo para determinação do caminho mais curto entre o nó m e todos os outros nós da rede $G = (V, E)$ de m nós. Nesse processo são considerados dois conjuntos S e \bar{S} tais que $S \cap \bar{S} = \emptyset$ e $S \cup \bar{S} = V - \{m\}$ que correspondem, respectivamente, aos conjuntos de nós com rótulos definitivos e rótulos provisórios. Além disso, são considerados dois vectores com $(m - 1)$ componentes, um vector d , em que cada componente i representa o custo do caminho do nó m ao nó i , e um vector a , em que cada componente i representa o nó que antecede o nó i no caminho de m para i . Em cada iteração do algoritmo é escolhido um nó $r \in \bar{S}$ que está a menor distância d_r do nó m . Esse nó r tem alguns nós adjacentes e pode acontecer que a distância do nó m a esses adjacentes seja menor passando pelo nó r do que a distância conhecida até então. Nesse caso as componentes do vector d associadas a esses nós são alteradas e conjuntamente com as componentes dos mesmos índices do vector a . A figura a seguir ilustra o procedimento desse passo para um grafo com 3 nós



Inicialmente tem-se

$$d = [2 \ 7], \quad a = [3 \ 3].$$

Como o nó 1 é adjacente ao nó 2 e

$$2 + 4 < 7,$$

então d_2 deve ser actualizado para 6 e a correspondente componente a_2 do vector a passa a ser igual ao nó 1 que foi escolhido nessa iteração. Então

$$d = [2 \ 6], \quad a = [3 \ 1].$$

Este tipo de procedimento deve ser efectuado $(m - 1)$ vezes, uma por cada um dos nós da rede a que pretendemos determinar o caminho mais curto e o respectivo custo ao nó m . No fim do processo, o vector d contém os custos dos caminhos mais curtos do nó m a cada um dos restantes nós. Por outro lado, devido à sua definição, o vector a fornece os caminhos a percorrer do nó m a cada um dos restantes nós.

O algoritmo de Dijkstra é baseado nas ideias apresentadas. Seguidamente apresentamos os passos deste processo para a determinação dos caminhos mais curtos do nó m aos nós $1, 2, \dots, m - 1$ num grafo $G = (V, E)$, em que cada aresta $(i, j) \in E$ tem associada um custo c_{ij} .

ALGORITMO DIJKSTRA

Sejam $\bar{S} = \{1, 2, \dots, n\}$, $S = \emptyset$

$$d_i = \begin{cases} c_{mi} & \text{se } (m, i) \in E \\ +\infty & \text{se } (m, i) \notin E \end{cases}$$

$$a_i = \begin{cases} m & \text{se } (m, i) \in E \\ +\infty & \text{se } (m, i) \notin E \end{cases}$$

Para $k = 1, 2, \dots, m - 1$

Determine: $d_r = \min \{d_i : i \in \bar{S}\}$

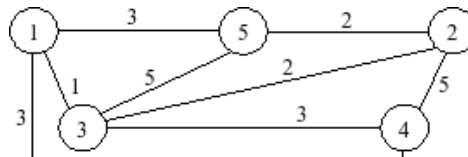
Actualize: $\bar{S} = \bar{S} - \{r\}$, $S = S \cup \{r\}$

Para cada nó $i \in \bar{S}$ tal que $(r, i) \in E$:

Calcule $\bar{d}_i = d_r + c_{ri}$

Se $\bar{d}_i < d_i$ faça $d_i = \bar{d}_i$ e $a_i = r$

Como exemplo de ilustração, consideremos o seguinte grafo indirecto com 5 nós e calculemos as distâncias e os caminhos mais curtos do nó 5 aos restantes nós



Inicialmente tem-se

nós	1	2	3	4
d_i	3	2	5	$+\infty$
a_i	5	5	5	$+\infty$

Na primeira iteração escolhe-se o nó 2, pois

$$d_2 = \min\{d_i : i = 1, 2, 3, 4\}$$

Então $S = \{2\}$ e $\bar{S} = \{1, 3, 4\}$. O nó 2 tem como adjacentes os nós 3, 4 e 5. Se c_{2j} representa a distância do nó 2 ao nó j , tem-se

$$\bar{d}_3 = d_2 + c_{23} = 4 < d_3 \Rightarrow d_3 = 4$$

$$\bar{d}_4 = d_2 + c_{24} = 7 < d_4 \Rightarrow d_4 = 7$$

O vector a é por sua vez actualizado a partir de

$$a_3 = 2, \quad a_4 = 2.$$

Fazendo estas alterações na tabela anterior, vem

nós	1	2	3	4
d_i	3	2	4	7
a_i	5	5	2	2

Agora

$$d_1 = \min\{d_i : i \in \bar{S}\}$$

o que implica a transferência do nó 1 de \bar{S} para S . O nó 1 tem como adjacentes 3, 4 e 5. Mas

$$\bar{d}_3 = d_1 + c_{13} = 4 \geq d_3$$

$$\bar{d}_4 = d_1 + c_{14} = 6 < d_4 \Rightarrow d_4 = 6$$

Portanto a_4 deve ser modificado para 1, obtendo-se a seguinte tabela

nós	1	2	3	4
d_i	3	2	4	6
a_i	5	5	2	1

Agora

$$d_3 = \min\{d_i : i \in \bar{S}\}$$

e faz-se $S = \{2, 1, 3\}$, $\bar{S} = \{4\}$. O nó 3 é adjacente a todos os nós, mas apenas interessam os nós $i \in \bar{S}$. Como

$$\bar{d}_4 = d_3 + c_{34} = 7 \geq d_4,$$

não há alterações nos vectores d e a . A última iteração resume-se à escolha do nó 4. A última tabela fornece toda a informação respeitante às distâncias e os caminhos mais curtos do nó 5 aos nós 1, 2, 3 e 4. Assim os valores das distâncias são as componentes d_i do vector d . Como $a_1 = a_2 = 5$, então as ligações directas são os caminhos mais curtos dos nós 1 e 2 ao nó 5. Por outro lado

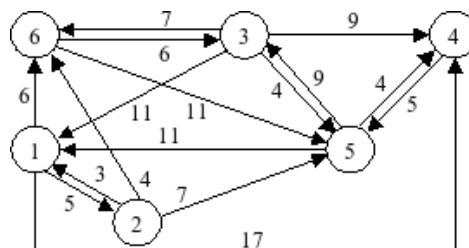
$$a_3 = 2, \quad a_4 = 5$$

pelo que o caminho mais curto de 5 a 3 passa pelo nó 2. Finalmente

$$a_4 = 1, \quad a_1 = 5$$

implica que o caminho óptimo entre 5 e 4 tem 1 como nó de passagem.

No caso de um grafo directo apenas há interesse em caminhos directos do nó m aos outros nós $1, 2, \dots, m-1$. Como exemplo de ilustração de aplicação do algoritmo neste último caso, consideremos o seguinte grafo directo



Então $m = 6$ e tem-se inicialmente $S = \emptyset$, $\bar{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

nós	1	2	3	4	5
d_i	$+\infty$	$+\infty$	6	$+\infty$	11
a_i	$+\infty$	$+\infty$	6	$+\infty$	6

Então

$$d_3 = \min\{d_i : i \in \bar{S}\}$$

e faz-se $S = \{3\}$, $\bar{S} = \{1, 2, 4, 5\}$. Do nó 3 partem as arestas (3, 1), (3, 4) e (3, 5), pelo que os valores de d_i e a_i , $i = 1, 4, 5$, são actualizados segundo o processo explicado anteriormente e tem-se a seguinte tabela

nós	1	2	3	4	5
d_i	17	$+\infty$	6	15	10
a_i	3	$+\infty$	6	3	3

Agora

$$d_5 = \min\{d_i : i \in \bar{S}\}$$

Como $\bar{S} = \{1, 2, 4\}$ apenas as arestas (5, 1) e (5, 4) devem ser consideradas. Então não há alteração para o nó 1, mas d_4 e a_4 vão ser modificados, obtendo-se a tabela

nós	1	2	3	4	5
d_i	17	$+\infty$	6	14	10
a_i	3	$+\infty$	6	5	3

Na próxima iteração tem-se

$$d_4 = \min\{d_i : i \in \bar{S}\}$$

e \bar{S} e S são alterados para $\bar{S} = \{1, 2\}$ e $S = \{3, 4, 5\}$. Como do nó 4 apenas sai a aresta (4, 5) e $5 \in S$, então não há qualquer modificação na tabela anterior. Na próxima iteração tem-se

$$d_1 = \min\{d_i : i \in \bar{S}\}$$

e $S = \{1, 3, 4, 5\}$, $\bar{S} = \{2\}$. Os valores de d_2 e a_2 são então modificados e tem-se

nós	1	2	3	4	5
d_i	17	22	6	14	10
a_i	3	1	6	5	3

A última iteração apenas escolhe o nó 2 e o algoritmo termina com a última tabela. As distâncias do nó 6 a cada um dos nós i são dadas pelos valores d_i das componentes do vector d . Os caminhos mais curtos a partir do nó 6 são determinados a partir do vector a , de acordo com o explicado anteriormente. Assim tem-se

1. O caminho mais curto de 6 a 3 é a ligação directa.
2. Para ir do nó 6 ao nó 1 deve-se ir de 6 para 3 e de 3 para 1.
3. A melhor maneira de alcançar o nó 2 é ir de 6 para 3, do nó 3 para o nó 1 e de 1 para 2.
4. O caminho mais curto de 6 para 4 é

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4$$

5. Para ir do nó 6 para o nó 5 deve-se ir primeiramente ao nó 3 e depois desse nó para 5.

Antes de terminar esta secção é importante notar que assumimos que os pesos em cada uma das arestas são não negativos. A existência de ciclos com peso negativo torna o problema do caminho mais curto ilimitado. Caso isso não aconteça existe sempre um caminho simples que é solução óptima desse problema. Algoritmos do tipo do apresentado dizem-se de rotulação definitiva, ou de rótulos permanentes, porque depois de o nó i ser escolhido a_i e d_i não voltam a ser alterados. Quando o nó escolhido não tem de ser o de menor custo em S o algoritmo diz-se de rotulação temporária. É ainda de referir que algoritmos de rotulação podem ser adaptados por forma a determinar caminhos entre um par de nós que optimizem outras funções objectivo.

17 Problema do Fluxo Máximo

Consideremos um grafo directo $G = (V, E)$ com m nós. Cada arco $(i, j) \in E$ tem associado uma capacidade, isto é, um limite superior u_{ij} e um limite inferior nulo. O *Problema do Fluxo Máximo* pretende determinar a maior quantidade de fluxo a enviar de um nó $s \in V$ a um outro nó $t \in V$ de modo a satisfazer as restrições de conservação de fluxo em cada nó (fluxo que sai é igual ao fluxo que entra) e os limites inferiores e superiores em cada aresta. O nó s diz-se *Origem* e t é denominado *Destino*.

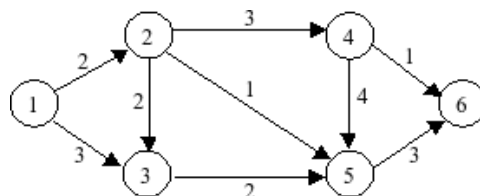
Se f representa o fluxo a enviar de s para t , então a formulação do problema é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z = f \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = g_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

e

$$g_i = \begin{cases} f & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \\ -f & \text{se } i = t \end{cases}$$

A título de exemplo, consideremos o grafo



(16)

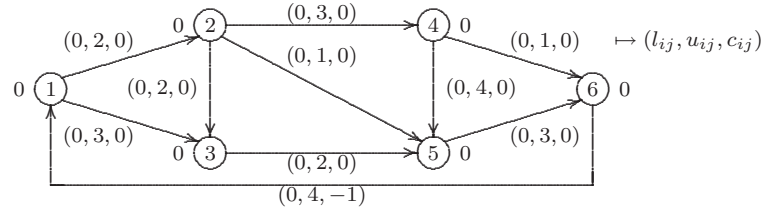
e sejam $s = 1$ e $t = 6$. Então a formulação do problema é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = -f \\ \text{Sujeito a} \quad & x_{12} + x_{13} & & = f \\ & -x_{12} & + x_{23} + x_{24} + x_{25} & = 0 \\ & & -x_{13} - x_{23} & + x_{35} & = 0 \\ & & & -x_{24} & + x_{45} + x_{46} & = 0 \\ & & & & -x_{25} - x_{35} - x_{45} & + x_{56} & = 0 \\ & & & & & -x_{46} - x_{56} & = -f \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

onde u_{ij} são os limites superiores apresentados nas arestas do grafo.

Se na última formulação introduzirmos a variável $x_{61} = f$, facilmente concluímos que o problema de fluxo

máximo é equivalente ao problema de fluxo de custo mínimo representado pela rede:



Notar que a determinação do limite superior da variável $x_{61} = f$ foi baseado na desigualdade óbvia:

$$f \leq \min \left\{ \sum_{j:(s,j) \in E} u_{sj}, \sum_{j:(j,t) \in E} u_{jt} \right\} \quad (17)$$

Assim, no exemplo presente tem-se

$$f \leq \min\{5, 4\} = 4$$

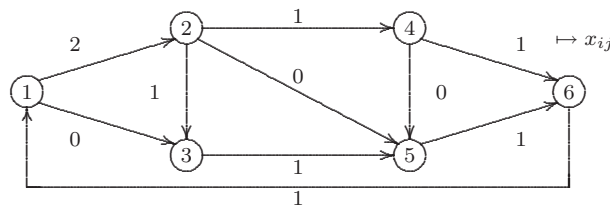
Assim mostrámos com este exemplo que todo o problema de fluxo máximo do nó s para o nó t é equivalente a um problema de fluxo de custo mínimo com limites num grafo alargado $G = (V, E')$, onde

$$E' = E \cup \{(t, s)\}, \quad b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad z = -x_{ts}$$

Dada a equivalência apresentada, o problema de fluxo máximo tem sempre uma solução óptima que pode ser obtida a partir do método simplex. A dificuldade em determinar uma primeira solução básica admissível e a estrutura especial do problema sugeriram o uso de uma outra técnica que resolve o problema de fluxo máximo sem explorar a redução a um problema de fluxo de custo mínimo. Esse algoritmo é discutido na próxima secção.

18 Resolução do Problema do Fluxo Máximo

Nesta secção, iremos descrever o conhecido algoritmo de Ford-Fulkerson para a resolução do problema do fluxo máximo. Para isso necessitamos do conceito de *Fluxo Válido*, que é definido como um vector $x = [x_{ij}]$ que satisfaz as restrições de conservação de fluxo em cada nó $i \neq s, t$ e os limites em cada aresta. Assim para o grafo do exemplo anterior a solução $x = [x_{ij}]$ definida pelo grafo pesado seguinte é um fluxo válido:



Com efeito, os limites são satisfeitos em cada aresta e em cada nó $i \neq 1, 6$ o fluxo que sai é exactamente igual ao que entra.

A cada fluxo válido podemos associar o seu valor $f(x)$, que é definido a partir de

$$f(x) = \sum_{(j,t) \in E} x_{jt} = \sum_{(s,j) \in E} x_{sj}$$

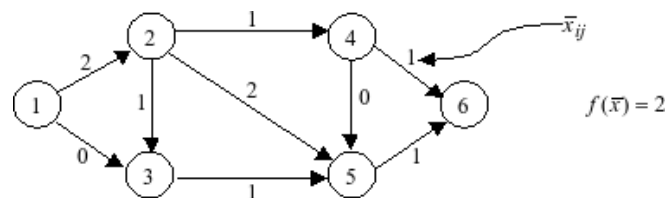
No caso do exemplo anterior tem-se $f(x) = 2$.

É fácil de concluir que o problema de fluxo máximo procura determinar um fluxo válido de maior valor. Um algoritmo para resolver este problema deve explorar apenas fluxos válidos até à obtenção do fluxo válido ótimo. Para isso é necessário encontrar um processo eficiente que permita passar de um fluxo válido \bar{x} de valor $f(\bar{x})$ para outro fluxo válido \tilde{x} de valor $f(\tilde{x}) > f(\bar{x})$. Além disso é também importante encontrar um critério de optimalidade que permita deduzir quando é que um fluxo válido \bar{x} é ótimo e que isso só ocorra quando não for possível encontrar um fluxo válido \tilde{x} com $f(\tilde{x}) > f(\bar{x})$. Os conceitos de cadeia incremental e corte (mínimo) de um grafo são fundamentais a esse respeito e são introduzidos a seguir.

Cadeia Incremental Seja $\bar{x} = [\bar{x}_{ij}]$ um fluxo válido. Uma *Cadeia Incremental* é uma cadeia que une o nó origem s e o nó terminal t com fluxo positivo a enviar de s para t através dos seus nós de forma a que se obtenha um novo fluxo válido $\tilde{x} = [\tilde{x}_{ij}]$ com valor de fluxo superior ao de \bar{x} , isto é, tal que

$$f(\tilde{x}) > f(\bar{x}).$$

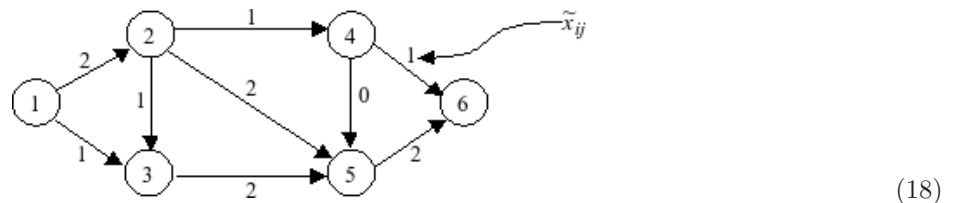
Para ilustrar este conceito, consideremos novamente o grafo apresentado em (16) e seja $\bar{x} = [\bar{x}_{ij}]$ o fluxo válido dado pela seguinte rede



Então

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

é uma cadeia incremental, pois se enviarmos uma quantidade de fluxo através dos nós dessa cadeia obtemos o seguinte fluxo válido $\tilde{x} = [\tilde{x}_{ij}]$



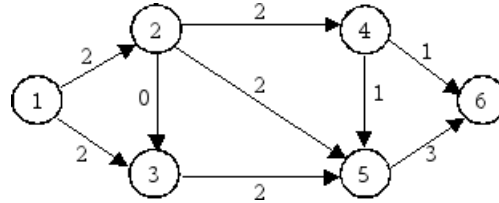
e $f(\tilde{x}) = 3 > f(\bar{x})$.

Notemos que o fluxo a enviar ao longo da cadeia tem de satisfazer as restrições de conservação de fluxo em cada nó e as restrições de capacidade (limites superiores e inferiores) em cada aresta. Assim no exemplo não pode existir uma cadeia incremental do fluxo válido \tilde{x} anterior que use a aresta $(1, 2)$, pois $\tilde{x}_{12} = u_{12}$.

A cadeia incremental apresentada é exactamente um caminho de s para t , pois as arestas têm todas o mesmo sentido de s para t . O nome cadeia é usado por ser também possível encontrar outras formas de enviar fluxo positivo de s para t usando algumas arestas com sentido contrário ao de s para t . Assim por exemplo consideremos o fluxo válido $\tilde{x} = [\tilde{x}_{ij}]$ apresentado em (18) e a cadeia

$$1 \rightarrow 3 \leftarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

Então se enviarmos uma quantidade de fluxo nas arestas com sentido directo e (-1) nas arestas com sentido contrário ao de s para t obtemos um fluxo válido $x^* = [x_{ij}^*]$

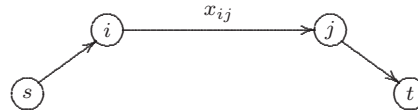


com $f(x^*) > f(\tilde{x})$. Donde a cadeia anterior é incremental para o fluxo válido \tilde{x} .

Chegamos assim à conclusão que para um dado fluxo válido $x = [x_{ij}]$ a construção de uma cadeia incremental deve ser feita aresta a aresta desde o nó origem s até ao nó destino t de modo a satisfazer as restrições de conservação de fluxo em cada nó e os limites em cada aresta. Além disso, se (i, j) é uma aresta candidata a ser escolhida numa cadeia incremental, então há dois possíveis casos:

1. (i, j) tem sentido de s para t :

Se



e se Δ representa a quantidade de fluxo a enviar em (i, j) então

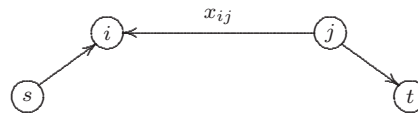
$$x_{ij} + \Delta \leq u_{ij}$$

Portanto Δ tem de satisfazer

$$0 < \Delta \leq u_{ij} - x_{ij} \tag{19}$$

2. (i, j) tem sentido contrário ao de s para t :

Se



e se Δ representa a quantidade de fluxo a enviar de i para j , então

$$x_{ij} - \Delta \geq 0$$

Portanto Δ tem de satisfazer

$$0 < \Delta \leq x_{ij} \tag{20}$$

Assim, se for possível encontrar uma cadeia de s para t onde as condições (19) e (20) sejam satisfeitas, essa cadeia é incremental e o valor de fluxo Δ a enviar será o maior valor Δ que satisfaça essas desigualdades ao longo das arestas da cadeia.

A cadeia incremental de s para t é assim construída usando os nós adjacentes de cada nó entre o nó origem s e o nó destino t . Se para um dado nó i não é possível encontrar um adjacente j com $\Delta > 0$ ao longo da aresta (i, j) ou (j, i) , então não existe uma cadeia incremental do nó s para o nó t . Iremos ver mais adiante que isso acontece apenas quando o fluxo válido corrente é óptimo.

Cortes e Corte Mínimo Dado um grafo $G = (V, E)$, um *Corte* (X, \bar{X}) é uma partição do conjunto de nós V em X e no seu complementar \bar{X} em relação a V de forma a que $s \in X$ e $t \in \bar{X}$. Assim para a rede (16), em que $s = 1$ e $t = 6$,

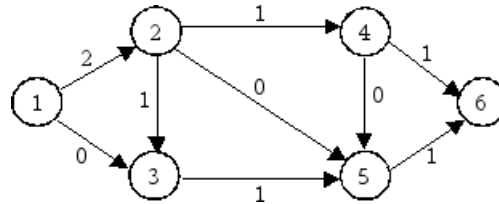
$$X = \{1, 2\}, \quad \bar{X} = \{3, 4, 5, 6\}$$

formam o corte (X, \bar{X}) .

Se (X, \bar{X}) é um corte do grafo G e $x = [x_{ij}]$ é um fluxo válido, então podemos considerar a quantidade

$$f(x; X, \bar{X}) = \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in X, j \in \bar{X}}} x_{ij} - \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in \bar{X}, j \in X}} x_{ij} \quad (21)$$

que representa a quantidade de fluxo que atravessa o corte (X, \bar{X}) . Assim por exemplo, consideremos novamente a rede (16) e o fluxo válido representado por



Se $X_1 = \{1, 2\}$ e $\bar{X}_1 = \{3, 4, 5, 6\}$ formam o corte (X_1, \bar{X}_1) , então

$$f(x; X_1, \bar{X}_1) = x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 0 + 1 + 1 + 0 = 2$$

Por outro lado para $X_2 = \{1, 3\}$ e $\bar{X}_2 = \{2, 4, 5, 6\}$ tem-se

$$f(x; X_2, \bar{X}_2) = x_{12} + x_{35} - x_{23} = 2 + 1 - 1 = 2$$

Das definições apresentadas, imediatamente se conclui que para um dado fluxo válido $x = [x_{ij}]$ o seu valor de fluxo é exactamente o fluxo que atravessa um qualquer corte (X, \bar{X}) , ou seja

$$\forall_{\substack{x \text{ válido} \\ (X, \bar{X}) \text{ corte}}} f(x; X, \bar{X}) = f(x) \quad (22)$$

Dado um corte (X, \bar{X}) , a sua *Capacidade* é a soma das capacidades das arestas que atravessam o corte no sentido de X para \bar{X} . Se $c(X, \bar{X})$ representa a capacidade do corte (X, \bar{X}) , então

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in X, j \in \bar{X}}} u_{ij} \quad (23)$$

Como em qualquer aresta (i, j)

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

então as fórmulas (21) e (22) implicam a seguinte desigualdade

$$\forall_{\substack{x \text{ válido} \\ (X, \bar{X}) \text{ corte}}} f(x) \leq c(X, \bar{X}) \quad (24)$$

Chama-se *Corte Mínimo* ao corte (X, \bar{X}) com menor capacidade, isto é, (X, \bar{X}) é corte mínimo se

$$c(X, \bar{X}) \leq c(Y, \bar{Y}), \text{ para qualquer corte } (Y, \bar{Y})$$

Das definições apresentadas e da fórmula (16), facilmente se conclui o seguinte resultado:

$$\underset{x \text{ válido}}{\text{Maximize}} f(x) \leq \underset{(X, \bar{X}) \text{ corte}}{\text{Minimize}} c(X, \bar{X}) \quad (25)$$

Consideremos agora um fluxo válido ao qual aplicámos o processo de construção de uma cadeia incremental descrito anteriormente. Se esse processo terminar sem se conseguir formar uma tal cadeia, então consideremos o conjunto X dos nós já visitados

$$X = \{j_1, \dots, j_p\}$$

onde $s \in X$ e $p \geq 1$. De acordo com esse processo, o fluxo a enviar de qualquer nó $j_i \in X$ para os restantes nós do grafo G pertencentes a \bar{X} está esgotado, ou seja, tem-se

$$\forall_{\substack{(i, j) \in E \\ i \in X, j \in \bar{X}}} x_{ij} = u_{ij} \quad \text{ou} \quad \forall_{\substack{(j, i) \in E \\ i \in X, j \in \bar{X}}} x_{ji} = 0$$

Então (X, \bar{X}) forma um corte de G e

$$c(X, \bar{X}) = f(x).$$

Portanto $x = [x_{ij}]$ é um fluxo óptimo do problema do fluxo máximo e o seu valor $f(x)$ é o fluxo máximo a enviar de s para t . Provámos assim que a desigualdade (25) se verifica como igualdade, ou seja, estabelecemos a seguinte propriedade:

Teorema 2 (Teorema do Fluxo Máximo – Corte Mínimo) *Em qualquer grafo $G = (V, E)$ o fluxo máximo de s para t é igual à capacidade do corte mínimo (X, \bar{X}) , onde $s \in X$ e $t \in \bar{X}$, isto é*

$$\underset{x \text{ válido}}{\text{Maximize}} f(x) = \underset{(X, \bar{X}) \text{ corte}}{\text{Minimize}} c(X, \bar{X})$$

Como referimos anteriormente, a demonstração deste teorema fornece um critério de paragem para o algoritmo de Ford-Fulkerson das cadeias incrementais, cujos passos são apresentados a seguir.

ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

Passo Inicial → Seja $x = [x_{ij}]$ um fluxo válido dado.

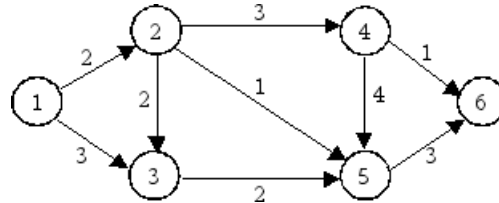
Passo Geral → Construa uma cadeia incremental do nó origem s para o nó destino t com fluxo positivo a enviar de s para t .

Se é possível formar essa cadeia, actualize o fluxo válido e o seu valor e repita o passo.

Se não é possível formar essa cadeia incremental, então $x = [x_{ij}]$ é um fluxo válido óptimo e $f(\bar{x})$ é o fluxo máximo.

Para terminar a descrição do algoritmo, note-se que o fluxo válido inicial é um vector $x = [x_{ij}]$ que satisfaz as restrições de conservação de fluxo em cada nó e os limites inferiores e superiores em cada aresta. Como $l_{ij} = 0$ para todos $(i, j) \in E$ e $b_i = 0$, para $i = 1, \dots, m$, então o vector nulo é uma possível escolha. Esse fluxo válido tem valor nulo, e por isso é a pior escolha possível para fluxo válido inicial. Por isso é apenas usado esse vector quando não é fácil determinar um fluxo válido à priori.

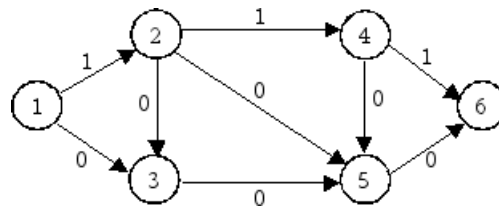
A título de ilustração do algoritmo de Ford-Fulkerson, consideremos a rede



e sejam $s = 1$ e $t = 6$ os nós origem e destino, respectivamente. Seja $x = 0$ o fluxo válido inicial. Uma primeira cadeia incremental mais ou menos óbvia para esse fluxo válido é a seguinte:

$$1 \xrightarrow{\Delta \leq 2} 2 \xrightarrow{\Delta \leq 3} 4 \xrightarrow{\Delta \leq 1} 6$$

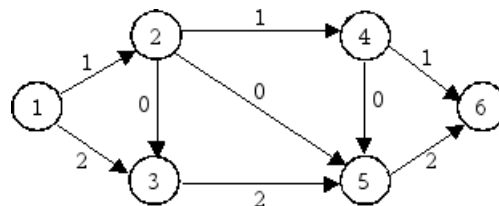
O valor Δ é assim 1 e obtém-se o segundo fluxo válido:



Escolhendo na formação de uma cadeia nós adjacentes que não tenham ainda sido explorados anteriormente constrói-se a seguinte cadeia incremental:

$$1 \xrightarrow{\Delta \leq 3} 3 \xrightarrow{\Delta \leq 2} 5 \xrightarrow{\Delta \leq 3} 6$$

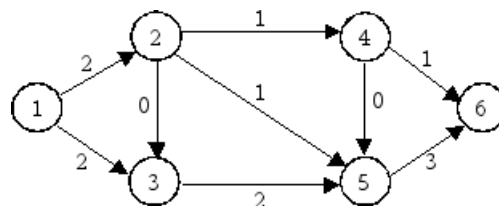
Então $\Delta = 2$ e obtém-se o novo fluxo válido:



Na próxima iteração podemos tentar construir a cadeia

$$1 \xrightarrow{1 + \Delta \leq 2} 2 \xrightarrow{0 + \Delta \leq 1} 5 \xrightarrow{2 + \Delta \leq 3} 6$$

Então $\Delta = 1$ e obtém-se o novo fluxo válido:



Na tentativa de encontrar uma nova cadeia incremental, a aresta (1,2) está esgotada, pois $x_{12} = u_{12}$. Portanto só há a hipótese

$$1 \xrightarrow{2 + \Delta} 3$$

As arestas que ligam o nó 3 aos restantes nós do grafo (2 e 5) estão esgotadas, pois $x_{23} = 0$ e $x_{35} = 2 = u_{35}$. Onde não é possível formar uma cadeia incremental. De acordo com a demonstração do teorema do fluxo máximo – corte mínimo, consideremos o corte (X, \bar{X}) tal que

$$X = \{1, 3\}, \quad \bar{X} = \{2, 4, 5, 6\}$$

Então a sua capacidade é

$$c(X, \bar{X}) = u_{12} + u_{35} = 2 + 2 = 4$$

e é igual ao valor do fluxo válido $f(x) = 4$. Então o último fluxo válido é ótimo para o problema de fluxo máximo e o seu valor 4 é o fluxo máximo a enviar do nó 1 para o nó 6 ao longo das arestas do grafo dado.

19 Problema de Afectação

Se c_{ij} é o custo a afectar ao indivíduo i a tarefa j e x_{ij} são as variáveis definidas por

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ for afecto à tarefa } j \\ 0 & \text{se o indivíduo } i \text{ não for afecto à tarefa } j \end{cases}$$

então a formulação matemática do problema de afectação tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Consideremos o problema de programação linear que se obtém do anterior substituindo as restrições $x_{ij} \in \{0, 1\}$ por $x_{ij} \geq 0$. Esse programa é exactamente um problema de transportes com n origens e n destinos e termos independentes iguais a um. Então, pelo teorema 1, a solução ótima desse programa existe. Além disso, pela propriedade P_9 , as restrições de integralidade são satisfeitas por essa solução ótima.

Portanto o problema de afectação pode ser formulado como um problema de fluxo de custo mínimo num grafo bipartido com $2n$ nós. Assim em cada solução básica desse problema há exactamente $(2n - 1)$ variáveis básicas. Contudo apenas n dessas variáveis são positivas, o que mostra que essas soluções básicas são altamente degeneradas. Como veremos mais adiante, essa propriedade pode acarretar algumas dificuldades na utilização do método simplex para a resolução desse problema.

A título de exemplo, suponhamos que numa determinada fábrica foram admitidos três novos empregados para trabalharem com três máquinas. Após vários testes obteve-se a seguinte matriz de custo empregado-máquina

Empregado \ Máquina	4	5	6
1	25	31	35
2	24	17	16
3	15	23	18

e que pretendemos determinar o problema de fluxo de custo mínimo correspondente à afectação funcionário-máquina. Como $n = 3$, então obtém-se imediatamente o seguinte problema

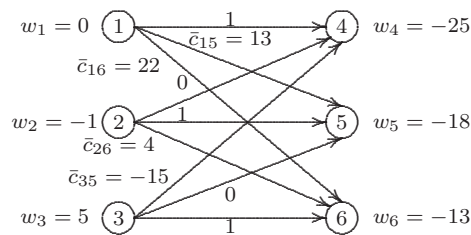
$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = & 25x_{14} + 31x_{15} + 35x_{16} + 24x_{24} + 17x_{25} + 16x_{26} + 15x_{34} + 23x_{35} + 18x_{36} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \\ & - \sum_{i=1}^3 x_{ij} = -1, \quad j = 4, 5, 6 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

20 Método Simplex para o Problema de Afectação

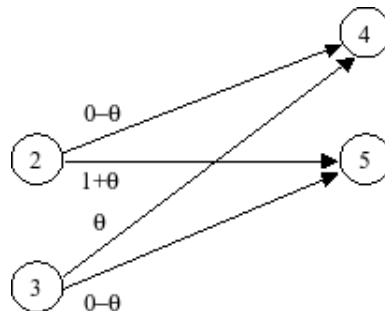
Como referimos anteriormente, o problema de afectação é equivalente ao seguinte problema de fluxo de custo mínimo

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = n+1, \dots, 2n \\ & - \sum_{j=n+1}^{2n} x_{ij} = -1, \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = n+1, \dots, 2n \end{aligned}$$

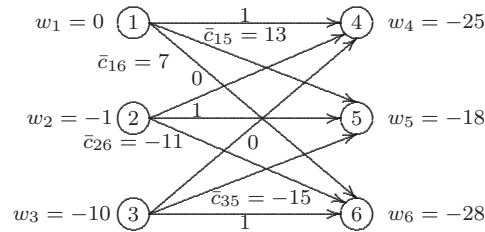
Devido à sua definição, qualquer solução básica admissível tem exactamente n variáveis básicas iguais a um, pelo que tem $(n - 1)$ variáveis básicas nulas. Portanto as soluções básicas admissíveis são muito degeneradas e isso torna o método simplex menos eficiente para a resolução do problema de afectação. A título de exemplo, consideremos o problema de afectação definido na secção anterior. Como referimos na secção do problema de transportes, uma primeira solução básica admissível é obtida esgotando as ofertas e as procuras de cima para baixo e completando a árvore geradora. Se considerarmos essa solução básica e calcularmos as variáveis duais e os coeficientes de custo reduzidos a si associados, tem-se



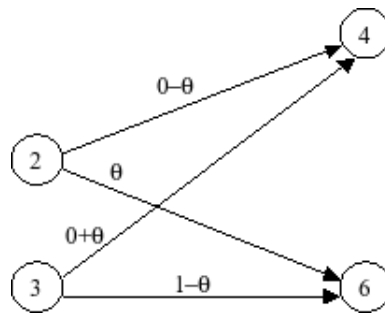
Então x_{34} é a variável não básica escolhida e forma-se o ciclo



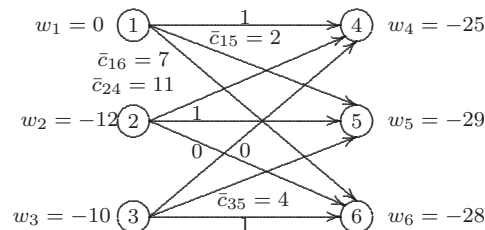
Donde $\theta = 0$ e a variável x_{35} passa a não básica por troca com x_{34} . A nova solução, a correspondente solução dual e os coeficientes de custo reduzidos das variáveis não básicas, são dados a seguir



É de notar que a solução é a mesma, pois houve apenas mudança nos índices das variáveis básicas e não básicas. Na próxima iteração $(r, s) = (2, 6)$ e forma-se o ciclo



Então $\theta = 0$ e novamente a variável básica x_{24} troca com a não básica x_{26} . A nova solução básica admissível, as correspondentes variáveis duais e os coeficientes de custo reduzidos das variáveis não básicas são dados a seguir



Como $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para todos $(i, j) \notin J$, então a solução é ótima. Chegamos assim à conclusão que a solução admissível inicial é ótima. Contudo foram necessárias duas iterações para confirmar que essa solução é realmente ótima. Se isto acontece num problema com apenas $n = 3$, facilmente se conclui que em muitos casos o método simplex pode requerer muitas iterações para determinar a solução ótima do problema de afectação.

21 Método Húngaro para o Problema de Afectação

Consideremos novamente o problema de afectação na forma de um problema de transportes

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a } &\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ &\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

O seu dual tem a forma

$$\begin{aligned} \text{Maximize } w &= \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \\ \text{Sujeito a } &u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Devido ao teorema da complementaridade das variáveis de folga, se $x = (x_{ij})$ é uma solução primal admissível e $(u = (u_i), v = (v_j))$ é uma solução dual admissível tais que

$$x_{ij}(c_{ij} - (u_i + v_j)) = 0, \quad \text{para todo } (i, j) \quad (26)$$

então $x = (x_{ij})$ é solução óptima do problema de afectação.

O Método Húngaro é um método primal-dual que explora essa propriedade para resolver o problema de afectação. Os seus passos são apresentados a seguir.

ALGORITMO HÚNGARO

Passo 1 → Determine uma solução dual admissível $u = (u_i)$ e $v = (v_j)$.

Passo 2 → Calcule os coeficientes de custo reduzidos

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

para todos os pares ordenados (i, j) .

Passo 3 → Procure determinar uma afectação A , isto é um conjunto de n pares (i, j) tais que $\bar{c}_{ij} = 0$ e cada um dos índices i e j aparece uma só vez nesse conjunto.

Passo 4 → Se for possível encontrar uma afectação A , então a solução

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \in A \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin A \end{cases}$$

é primal admissível e satisfaz a condição de complementaridade (26). Donde essa solução é óptima e o algoritmo termina. De outro modo determina-se uma nova solução dual admissível $u = (u_i)$, $v = (v_j)$ com maior valor da função dual, actualizam-se os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} e volta-se ao Passo 2.

Como o valor da função dual aumenta em cada iteração e há um número finito de afectações, então o método tem de terminar num número finito de iterações. Seguidamente explicamos como os vários passos são efectuados.

Passo 1 Determinação de uma solução dual admissível

Dada a simplicidade do problema de afectação, existem várias formas de obter uma solução desse tipo. Uma maneira simples de o fazer consiste em escolher u_i e v_j de acordo com as seguintes fórmulas

$$\begin{cases} v_j = \min_i c_{ij}, & j = 1, 2, \dots, n \\ u_i = \min_j (c_{ij} - v_j) & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (27)$$

Então a segunda igualdade implica que

$$u_i \leq c_{ij} - v_j$$

para todo (i, j) e portanto

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Donde $(u = (u_i), v = (v_j))$ é dual admissível.

Como exemplo de ilustração, consideremos novamente o problema de afectação definido pelos custos c_{ij} apresentados na tabela a seguir

$i \setminus j$	1	2	3
1	25	31	35
2	24	17	16
3	15	23	18

(28)

Então os valores das variáveis v_j são calculados simplesmente escolhendo os menores elementos de cada coluna j isto é, tem-se

$$v = [15 \ 17 \ 16]$$

Além disso os elementos u_i são calculados usando em cada linha i os respectivos coeficientes de custo e as variáveis v_j já determinadas, do seguinte modo

$$u_1 = \min\{25 - 15, 31 - 17, 35 - 16\} = \min\{10, 14, 19\} = 10$$

$$u_2 = \min\{24 - 15, 17 - 17, 16 - 16\} = \min\{9, 0, 0\} = 0$$

$$u_3 = \min\{15 - 15, 23 - 17, 18 - 16\} = \min\{0, 6, 2\} = 0$$

Donde

$$u = [10 \ 0 \ 0]$$

Passo 2 Este passo é trivial de efectuar. Normalmente considera-se um quadro com \bar{c}_{ij} e as variáveis duais u_i e v_j da forma seguinte

$i \setminus j$	1	...	j	...	n	u_i
1	\bar{c}_{11}	...	\bar{c}_{1j}	...	\bar{c}_{1n}	\bar{u}_1
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
i	\bar{c}_{i1}	...	\bar{c}_{ij}	...	\bar{c}_{in}	\bar{u}_i
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
n	\bar{c}_{n1}	...	\bar{c}_{nj}	...	\bar{c}_{nn}	\bar{u}_n
v_j	\bar{v}_1	...	\bar{v}_j	...	\bar{v}_n	\bar{w}

com $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_n)$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_n)$ a solução dual e \bar{w} o valor da função dual.

Passo 3 Para determinar uma afectação no sentido explicado anteriormente usa-se um processo orientado por linhas que contém no máximo n iterações e funciona da seguinte forma.

PROCESSO DE AFECTAÇÃO

1. Escolha a linha i das não marcadas com o menor número de coeficientes \bar{c}_{ij} nulos.
2. Enquadre um desses elementos nulos e marque a linha i e a coluna j a que ele pertence.
3. Se não for possível encontrar uma linha com pelo menos um coeficiente \bar{c}_{ij} nulo, o processo termina sem obter uma afectação. De outro modo volte a 1.

Seguidamente apresentamos os Passos 2 e 3 para o problema de afectação apresentado em (28). O quadro com os valores de \bar{c}_{ij} e das variáveis duais tem a seguinte forma

$i \setminus j$	1	2	3	u_i
1	0	4	9	10
2	9	0	0	0
3	0	6	2	0
v_j	15	17	16	58

Segundo o Processo Afectação deve-se escolher uma das linhas 1 ou 3 por serem as que têm menor número de zeros entre os coeficientes \bar{c}_{ij} . Escolhendo a linha 1, enquadra-se o elemento nulo dessa linha (\bar{c}_{11}) e marca-se a linha e coluna a que pertence esse elemento, obtendo-se o seguinte quadro

$i \setminus j$	1	2	3	u_i
1	0	4	9	10
2	9	0	0	0
3	0	6	2	0
v_j	15	17	16	58

Como a linha 2 tem dois elementos \bar{c}_{2j} nulos e a linha três após a marcação não tem nenhum, escolhe-se a linha 2 e enquadra-se o elemento \bar{c}_{22} (por exemplo). Então obtém-se

$i \setminus j$	1	2	3	u_i
1	0	4	9	10
2	9	0	0	0
3	0	6	2	0
v_j	15	17	16	58

(29)

Se agora marcarmos a linha 2 e coluna 2 ficamos apenas com o elemento \bar{c}_{33} . Como $\bar{c}_{33} \neq 0$ então o processo termina sem conseguir obter uma afectação.

Passo 4 - Para determinar uma nova solução dual admissível com maior valor da função dual utiliza-se o processo seguinte:

ACTUALIZAÇÃO DO DUAL

1. Marcar um número mínimo de linhas e colunas de modo a que todos os coeficientes $\bar{c}_{ij} = 0$ estejam nas linhas e colunas marcadas. Para isso marca-se a linha ou coluna com maior número de zeros. Depois

despreza-se essa linha ou coluna e repete-se o mesmo procedimento até cobrir todas as entradas (i, j) correspondentes a $\bar{c}_{ij} = 0$.

2. Determine a quantidade $\delta > 0$ tal que

$$\delta = \min\{\bar{c}_{ij} : (i, j) \text{ não pertence à linha nem à coluna marcada}\} \quad (30)$$

3. Atualize os valores das variáveis duais a partir de

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \begin{cases} \bar{u}_i & \text{se linha } i \text{ não está marcada} \\ \bar{u}_i - \delta & \text{se linha } i \text{ está marcada} \end{cases} \\ \bar{v}_j &= \begin{cases} \bar{v}_j & \text{se coluna } j \text{ está marcada} \\ \bar{v}_j + \delta & \text{se coluna } j \text{ não está marcada} \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

A actualização (31) das variáveis duais permite encontrar uma fórmula simples para a actualização dos coeficientes de custo reduzidos:

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} \bar{c}_{ij} + \delta & \text{se a linha } i \text{ está marcada e a coluna } j \text{ está marcada} \\ \bar{c}_{ij} & \text{se a linha } i \text{ está marcada e a coluna } j \text{ não está marcada} \\ \bar{c}_{ij} & \text{se a linha } i \text{ não está marcada e a coluna } j \text{ está marcada} \\ \bar{c}_{ij} - \delta & \text{se a linha } i \text{ não está marcada e a coluna } j \text{ não está marcada} \end{cases} \quad (32)$$

Como referimos anteriormente, a função dual do problema de afectação é definida por

$$w = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$$

Se (\bar{u}, \bar{v}) é a solução dual antes de actualizar, então

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i + \sum_{j=1}^n \bar{v}_j$$

De acordo com o processo de actualização tem-se $\delta > 0$ e apenas as variáveis u_i nas linhas marcadas e as v_j nas colunas não marcadas são alteradas. Mas o número de colunas não marcadas é sempre maior do que o número de linhas marcadas, pelo que o valor da função dual aumenta num valor igual a $(n - k)\delta$, com k o número de linhas e colunas marcadas. Além disso a definição de δ imediatamente implica que as relações

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

se mantêm verdadeiras para a nova solução dual. Mostrámos assim que o processo de actualização da solução dual permite obter uma nova solução dual admissível com valor da função dual superior à da anterior. Como referimos anteriormente, é esta propriedade que permite assegurar a convergência do método húngaro num número finito de iterações.

A seguir apresentamos a aplicação deste processo à solução dual dada no quadro (29). Como a linha 2 e a coluna 1 são as que contêm mais zeros, deve-se começar por marcar uma delas. Se marcarmos primeiramente a coluna 1, a linha 2 mantém-se com dois elementos nulos, pelo que é marcada a seguir. A fase 1 do processo termina com essas duas marcações. Então

$$\delta = \min\{2, 4, 6, 9\} = 2$$

e as variáveis duais são actualizadas segundo as fórmulas (31). Esses dois tipos de operações são efectuadas no quadro (29), obtendo-se o seguinte quadro

$i \setminus j$	1	2	3	u_i
1	\emptyset	4	9	10
2	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-2
3	\emptyset	6	2	0
v_j	15	19	18	60

Seguidamente actualizam-se os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} a partir de (32) e obtém-se um quadro, que, de acordo com o Processo Afectação, fornece a afectação associada aos zeros enquadrados

$i \setminus j$	1	2	3	u_i
1	0	2	7	10
2	11	0	0	-2
3	0	4	0	0
v_j	15	19	18	60

Portanto o algoritmo húngaro termina. A solução óptima do problema de afectação é dada por

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ para todos os outros } (i, j)$$

e o valor óptimo da função é 60. Note-se que esta solução é a mesma que foi obtida pelo método simplex.

Na resolução de um problema de afectação pelo método húngaro os Passos 1 (ou 4), 2 e 3 que constituem uma iteração do algoritmo são efectuados no mesmo quadro. Deste modo cada iteração tem associada um quadro. A título de exemplo consideremos o problema de afectação cuja matriz de custos é apresentada a seguir

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	180	6	11	6	16	19
2	5	180	18	13	21	9
3	8	12	180	22	18	11
4	20	18	27	180	22	15
5	10	22	11	25	180	18
6	16	10	17	30	10	180

A aplicação dos passos 1, 2 e 3 do algoritmo húngaro conduz ao seguinte quadro

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	u_i
1	175	\emptyset	\emptyset	\emptyset	6	19	0
2	\emptyset	174	7	7	11	\emptyset	0
3	1	4	167	14	6	\emptyset	2
4	\emptyset	6	10	168	6	\emptyset	6
5	5	16	\emptyset	19	170	\emptyset	0
6	11	4	6	24	\emptyset	171	0
v_j	5	6	11	6	10	9	55

Portanto não se obteve uma afectação e uma nova iteração tem de ser efectuada. Para actualizar as variáveis duais marcam-se primeiramente as linhas e colunas de acordo com a regra referida anteriormente. Agora $\delta = 4$ e apenas as variáveis u_1 (correspondente à linha marcada) e v_2, v_4 (referentes a colunas não marcadas) são actualizadas por

$$u_1 = 0 - 4, \quad v_2 = 6 + 4, \quad v_4 = 6 + 4.$$

Portanto o valor da função dual aumenta em 4 unidades, o que está de acordo com o referido anteriormente. O próximo quadro inclui a nova solução dual e os coeficientes de custo reduzidos \bar{c}_{ij} e fornece uma afectação

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	u_i
1	179	0	4	0	10	14	-4
2	0	170	7	3	11	0	0
3	1	0	167	10	6	0	2
4	9	2	10	164	6	0	6
5	5	12	0	15	170	9	0
6	11	0	6	20	0	171	0
v_j	5	10	11	10	10	9	59

Portanto o algoritmo termina com a solução óptima

$$x_{14} = x_{21} = x_{32} = x_{46} = x_{53} = x_{65} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ para todos os outros } (i, j)$$

e o valor óptimo da função é 59.

22 Problemas de Afectação Não Equilibrados

Considere-se o problema de afectar m indivíduos a n tarefas, com $n < m$, em que cada indivíduo executa no máximo uma tarefa e cada tarefa é executada por um e um só indivíduo. Tal como no caso do problema de fluxo de custo mínimo, é possível equilibrar o problema de afectação introduzindo $(m - n)$ tarefas fictícias com coeficientes de custo todos nulos, isto é,

$$c_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = n + 1, n + 2, \dots, m.$$

Se na solução óptima $x_{ij} = 1$ com $j \leq n$, o indivíduo i executa a tarefa j e se $x_{ij} = 1$ com $j > n$, o indivíduo i não executa nenhuma das tarefas pedidas.

Considere-se agora o problema de afectar m indivíduos a n tarefas, com $n > m$, em que cada indivíduo executa uma e uma só tarefa e cada tarefa pode ser executada por um indivíduo ou não. Neste caso é também possível equilibrar o problema de afectação introduzindo $(n - m)$ indivíduos fictícios com coeficientes de custo todos nulos, isto é,

$$c_{ij} = 0, \quad i = m + 1, m + 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se na solução óptima $x_{ij} = 1$ com $i \leq m$, o indivíduo i executa a tarefa j e se $x_{ij} = 1$ com $i > m$, a tarefa j não é executada por nenhum dos indivíduos.

A título de exemplo consideremos o problema de afectação cuja matriz de custos é apresentada a seguir

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	9	6	9	9	5
2	7	5	5	6	1
3	7	8	6	8	3

Como existem três indivíduos e cinco tarefas, temos de juntar dois indivíduos fictícios 4 e 5 com custos

$$c_{ij} = 0, \quad i = 4, 5; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Deste modo, obtemos um problema de afectação equilibrado cuja matriz de custos é a seguinte

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	9	6	9	9	5
2	7	5	5	6	1
3	7	8	6	8	3
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

A aplicação dos passos 1, 2 e 3 do algoritmo húngaro conduz ao seguinte quadro

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	u_i
1	4	1	4	4	\emptyset	5
2	6	4	4	5	\emptyset	1
3	4	5	3	5	\emptyset	3
4	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	0
5	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	0
v_j	0	0	0	0	0	9

Não se obteve uma afectação e uma nova iteração do método húngaro deve ser efectuada. Depois de marcadas as linhas e colunas, de acordo com o ponto (i) do passo 4, obtém-se $\delta = 1$. A nova solução dual e os coeficientes de custo reduzidos que são actualizados a partir de (31) e (32), estão apresentados no quadro seguinte

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	u_i
1	3	\emptyset	3	3	\emptyset	5
2	5	3	3	4	\emptyset	1
3	3	4	2	4	\emptyset	3
4	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-1
5	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-1
v_j	1	1	1	1	0	11

A solução correspondente a este quadro não é primal admissível. Assim deve-se efectuar uma nova iteração do método húngaro com $\delta = 2$, obtendo-se o seguinte quadro

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	u_i
1	3	\emptyset	3	3	2	3
2	3	1	1	2	\emptyset	1
3	1	2	\emptyset	2	0	3
4	\emptyset	0	0	0	3	-3
5	0	0	0	\emptyset	3	-3
v_j	3	3	3	3	0	13

O algoritmo termina com a solução óptima

$$x_{12} = x_{25} = x_{33} = x_{41} = x_{54} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ para todos os outros } (i, j)$$

e o valor óptimo da função é 13. Como os indivíduos 4 e 5 são fictícios, a tarefa 2 é afectada ao indivíduo 1, a tarefa 5 ao indivíduo 2, a tarefa 3 ao indivíduo 3 e as restantes tarefas 1 e 4 não são afectadas a qualquer indivíduo.

23 Otimização Não Linear em Redes

Seja f uma função continuamente diferenciável (derivadas parciais existem e são contínuas) de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^1 e $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. O problema de otimização consiste em

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & x \in K \end{array}$$

e diz-se *Não Linear* se f ou as funções que definem o conjunto K são não lineares. Uma solução ótima deste problema diz-se *Mínimo global* de f em K . Na prática, a determinação de um tal ponto $\bar{x} \in K$ é difícil, pelo que a maioria dos algoritmos de otimização não linear procura obter um mínimo local de f , isto é, um mínimo \bar{x} de f numa dada vizinhança de \bar{x} .

O conceito de ponto estacionário de f em K está associado à determinação de um mínimo local ou global de f em K . Diz-se que \bar{x} é um *Ponto Estacionário* de f em K se

$$\nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq 0 \text{ para todo } x \in K \quad (33)$$

isto é, se \bar{x} é mínimo global do problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \nabla f(\bar{x})^T x \\ \text{Sujeito a} & x \in K \end{array}$$

Notar que $\nabla f(x)$ representa o gradiente de f em x e é definido por $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{R}^n$.

Para ilustração deste conceito, consideremos o seguinte programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Então

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

é um conjunto convexo e \bar{x} é ponto estacionário de f em K se e só se

$$c^T \bar{x} \leq c^T x, \quad \forall x \in K$$

Assim para programas lineares, \bar{x} é ponto estacionário de f em K se e só se \bar{x} é mínimo global de f em K .

Para problemas de otimização não linear, o resultado não é em geral válido, mas é possível estabelecer algumas propriedades que ilustram a importância do conceito de ponto estacionário em otimização não linear diferenciável. Para as estabelecer necessitamos dos seguintes resultados:

Teorema 3 (Teorema dos acréscimos finitos) *Se f é continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n , então para quaisquer $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, existe pelo menos um $\tilde{x} \in]\bar{x}, x[$ tal que*

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\tilde{x})^T(x - \bar{x})$$

Teorema 4 *Uma função f continuamente diferenciável é convexa no conjunto convexo K (isto é, $f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$ para todos $\lambda \in [0, 1]$, $x^1, x^2 \in K$) se e só se para quaisquer $x, \bar{x} \in K$,*

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x})$$

Como consequência destes dois teoremas é possível provar as seguintes propriedades, cujas demonstrações simples se deixam como exercício:

Teorema 5 *Se \bar{x} é mínimo local ou global de f em K , então \bar{x} é ponto estacionário de f em K .*

Teorema 6 *Se f é convexa em K , então \bar{x} é ponto estacionário de f em K se e só se \bar{x} é mínimo global de f em K .*

O algoritmo de Frank-Wolfe para otimização não linear considera programas da forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (34)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ é uma função continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n , ou pelo menos num conjunto aberto que contém o conjunto admissível

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \quad (35)$$

em que A é uma matriz de ordem $m \times n$, com $m < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Esse algoritmo procura determinar um ponto estacionário de f nesse conjunto K resolvendo em cada iteração um programa linear que surge da definição de ponto estacionário.

Para uma descrição do algoritmo, seja $\bar{x} \in K$ uma solução admissível do programa não linear. Para verificar se \bar{x} é um ponto estacionário de f em K , há que resolver o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \nabla f(\bar{x})^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (36)$$

Seja $y \in K$ a solução óptima desse programa. Dois casos podem acontecer e são discutidos a seguir.

1. Se

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{x} \leq \nabla f(\bar{x})^T y \quad (37)$$

então

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{x} \leq \nabla f(\bar{x})^T y \leq \nabla f(\bar{x})^T x$$

para todo $x \in K$ e portanto \bar{x} é ponto estacionário de f em K .

2. Se (37) não se verifica, considere-se o vector

$$d = y - \bar{x}$$

Então d é uma direcção descendente de f em \bar{x} , pois satisfaz

$$\nabla f(\bar{x})^T d = \nabla f(\bar{x})^T (y - \bar{x}) < 0.$$

Como f é continuamente diferenciável, existe $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$\forall_{0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}} \nabla f(\bar{x} + \alpha d)^T d < 0 \quad (38)$$

Então, pelo teorema dos acréscimos finitos, para $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ tem-se

$$\exists_{0 < \tilde{\alpha} < \alpha} f(\bar{x} + \alpha d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x} + \tilde{\alpha} d)^T (\alpha d)$$

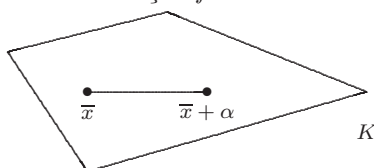
Mas $\alpha > 0$ e

$$\nabla f(\bar{x} + \tilde{\alpha} d)^T d < 0$$

por (38). Portanto

$$\forall_{0 < \alpha \leq \bar{\alpha}} f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x}). \quad (39)$$

Provamos assim que um movimento de \bar{x} para um outro ponto $(\bar{x} + \alpha d) \in K$ ao longo da direcção d é conveniente para o objectivo de minimizar a função f em K .



O desenvolvimento de um algoritmo para a determinação de um ponto estacionário de f em K necessita de um processo prático para calcular o valor de α que satisfaça a desigualdade (39). A primeira exigência para a determinação de um tal valor α diz respeito a $(\bar{x} + \alpha d) \in K$. Mas isso acontece se

$$A(\bar{x} + \alpha d) = b$$

$$\bar{x} + \alpha d \geq 0$$

Como $\bar{x} \in K$, então $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \geq 0$. Portanto

$$\begin{cases} \alpha(A_d) = 0 \\ \bar{x}_i + \alpha d_i \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Mas $y \in K$ e portanto

$$Ad = A(y - \bar{x}) = Ay - A\bar{x} = 0$$

pelo que a primeira restrição é verdadeira. A segunda restrição é verdadeira se $d_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. De outro modo

$$\alpha \leq \frac{\bar{x}_i}{-d_i}, \quad \text{para todo } i \text{ tal que } d_i < 0$$

Então α tem de ser escolhido menor ou igual do que o número

$$\alpha_{\max} = \begin{cases} +\infty & \text{se } d_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n \\ \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{-d_i} : d_i < 0 \right\} & \end{cases} \quad (40)$$

Assim α deve ser um número positivo inferior ou igual a α_{\max} que satisfaça a desigualdade (39). Na prática essa desigualdade é substituída pela chamada Fórmula ou Critério de Armijo:

$$f(\bar{x} + \alpha d) \leq f(\bar{x}) + \alpha \beta \nabla f(\bar{x})^T d \quad (41)$$

onde β é um número real positivo e menor do que um. É de notar que se α satisfaz essa desigualdade, então também satisfaz $f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x})$. A determinação de α é feita por tentativas da forma

$$\alpha = \theta^t \min\{1, \alpha_{\max}\}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (42)$$

com $0 < \theta < 1$ um número dado (normalmente $\theta = 1/2$) até à satisfação da desigualdade (41).

O algoritmo de Frank-Wolfe determina em cada iteração a direcção descendente d definida anteriormente e o passo $\alpha > 0$ de acordo com o critério de Armijo. É possível provar que o algoritmo possui convergência global para um ponto estacionário de f em K [Nash and Sofer, 1996]. Os passos do método são apresentados a seguir:

ALGORITMO DE FRANK-WOLFE

Passo 0 → Seja $\bar{x} \in K$.

Passo 1 → Determine a solução óptima y do programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \nabla f(\bar{x})^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Passo 2 → Se a condição (37) é verdadeira, então \bar{x} é ponto estacionário de f em K e termine. De outro modo, seja

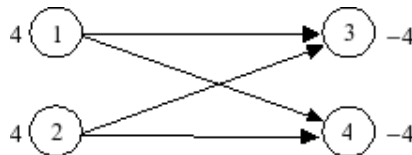
$$d = y - x$$

Passo 3 → Determine α_{\max} a partir de (40) e seja α dado por (42), onde t é o primeiro inteiro não negativo que satisfaz o critério de Armijo (41)

Passo 4 → Actualize $\bar{x} = \bar{x} + \alpha d$ e volte ao Passo 1.

Da descrição dos passos do algoritmo, facilmente se conclui que o processo necessita de resolver um programa linear em cada iteração. Por isso só é utilizado na prática quando esses programas lineares se podem resolver de um modo extremamente rápido. A utilidade desse algoritmo resume-se assim a programas lineares estruturados, como o de fluxo de custo mínimo (transportes e afectação), onde o uso de outros processos não explora devidamente as suas estruturas especiais. É ainda de acrescentar que cada um dos programas lineares a resolver nas iterações $k \geq 2$ tem uma base avançada admissível, que é exactamente a correspondente à solução óptima do programa linear resolvido na iteração $k - 1$.

A título de exemplo de aplicação do algoritmo de Frank-Wolfe, consideremos o problema de transportes definido pelo seguinte grafo bipartido



onde para cada aresta (i, j) a função custo $f_{ij}(x_{ij})$ é definida por

$$f_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} + \frac{1}{2}x_{ij}^2$$

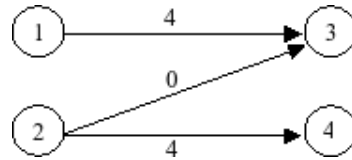
Portanto há que resolver o programa não linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(x) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 \left(x_{ij} + \frac{1}{2} x_{ij}^2 \right) = e^T x + \frac{1}{2} x^T x \\ \text{Sujeito a } & \begin{aligned} x_{13} + x_{14} &= 4 \\ x_{23} + x_{24} &= 4 \\ -x_{13} - x_{23} &= -4 \\ -x_{14} - x_{24} &= -4 \\ x_{ij} &\geq 0, \quad (i, j) \in E \end{aligned} \end{aligned}$$

onde

$$e = (1, 1, 1, 1)^T, \quad x = (x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24})^T$$

No passo 0 do algoritmo de Frank-Wolfe é necessário determinar uma solução admissível do conjunto de restrições do problema de transportes, o que pode ser conseguido através do processo normal



Então

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (4, 0, 0, 4)^T \\ f(\bar{x}) &= e^T \bar{x} + \frac{1}{2} \bar{x}^T \bar{x} = 24 \end{aligned}$$

No passo 1 do algoritmo é necessário calcular o gradiente $\nabla f(\bar{x})$ de f em \bar{x} . Mas para qualquer $x \in \mathbb{R}^4$,

$$\nabla f(x) = x + e$$

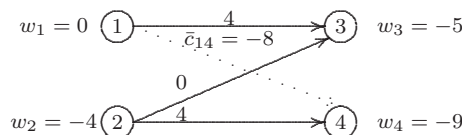
Donde

$$\nabla f(\bar{x}) = \bar{x} + e = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

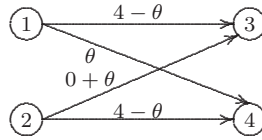
Para determinar a solução óptima do programa linear de transportes

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \nabla f(\bar{x})^T x \\ \text{Sujeito a } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

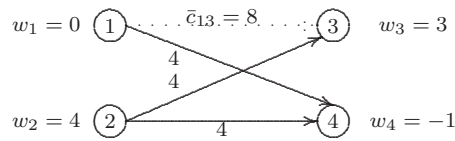
utiliza-se o método simplex com solução inicial \bar{x} . Assim tem-se



Então x_{14} é a variável não básica escolhida a passar a básica e forma-se o ciclo



Donde $\theta = 4$ e uma das variáveis x_{13} ou x_{24} deve passar a não básica por troca com x_{14} . Se escolhermos x_{13} , então obtém-se uma nova solução básica. O grafo seguinte contém essa solução, as variáveis duais e os coeficientes de custo reduzidos associados às variáveis não básicas:



Então

$$y = (0 \ 4 \ 4 \ 0)^T$$

é a solução ótima desse programa. Além disso o valor ótimo é 8, pelo que

$$\nabla f(\bar{x})^T y = 8 < \nabla f(\bar{x})^T \bar{x} = 40$$

Assim considera-se a direção descendente

$$d = y - \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

No passo 3, calcula-se primeiramente

$$\alpha_{\max} = \min \left\{ \frac{4}{-(-4)}, \frac{4}{-(-4)} \right\} = 1$$

e

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^t \min \{1, \alpha_{\max}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

com t o primeiro inteiro não negativo tal que α satisfaz o critério de Armijo

$$f(\bar{x} + \alpha d) \leq f(\bar{x}) + \beta \alpha \nabla f(\bar{x})^T d$$

com $\beta = 0.1$. Então determinam-se as seguintes quantidades:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^T d = \nabla f(\bar{x})^T (y - \bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T y - \nabla f(\bar{x})^T \bar{x} = 8 - 40 = -32 \\ \beta \nabla f(\bar{x})^T d = -3.2 \\ f(\bar{x}) = 24 \end{cases}$$

Para $t = 0$, tem-se

$$f(\bar{x} + 1d) = f(y) = e^T y + \frac{1}{2} y^T y = 24$$

Como

$$f(\bar{x}) + \alpha\beta\nabla f(\bar{x})^T d = 24 - 3.2 < f(\bar{x} + 1d)$$

então faz-se uma segunda tentativa com

$$\alpha = \theta^1 = \frac{1}{2}$$

Mas

$$\tilde{x} = \bar{x} + \frac{1}{2}d = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e

$$f(\tilde{x}) = f\left(\bar{x} + \frac{1}{2}d\right) = e^T \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{x} = 8 + 8 = 16$$

Como

$$f\left(\bar{x} + \frac{1}{2}d\right) = 16 \leq 24 - 3.2 \frac{1}{2}$$

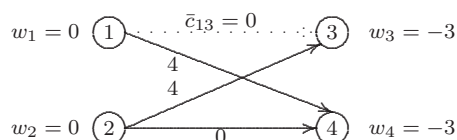
então $\alpha = \frac{1}{2}$ e o novo iterando é

$$\bar{x} = (2 \ 2 \ 2 \ 2)^T$$

Na segunda iteração, calcula-se primeiramente

$$\nabla f(\bar{x}) = (3 \ 3 \ 3 \ 3)^T$$

para resolver o problema de transportes necessário ao cálculo do vector y . A solução óptima do problema de transportes resolvido na primeira iteração do método de Frank-Wolfe deve ser a solução inicial para o novo problema de transportes, pelo que se tem



A solução óptima desse problema é $y = (0 \ 4 \ 4 \ 0)^T$ e o valor óptimo é

$$\nabla f(\bar{x})^T y = 24$$

Como

$$\nabla f(\bar{x})^T \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 24 \leq \nabla f(\bar{x})^T y$$

então \bar{x} é ponto estacionário de f em K . Notar que esse ponto estacionário é o mínimo global de f em K , pois a função é convexa em \mathbb{R}^4 e também em K .

Como é discutido em livros de optimização não linear, existem vários critérios para a determinação do passo α . Em termos puramente teóricos, α deve procurar minimizar o valor da função f ao longo da direcção d , isto é, α deve ser solução óptima do programa não linear unidimensional

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && f(\bar{x} + \alpha d) \\ &\text{Sujeito a} && \alpha \in [0, \alpha_{\max}] \end{aligned} \tag{43}$$

Em geral a determinação da solução óptima desse programa é difícil, pelo que se utiliza o Critério de Armijo na maioria dos casos. Contudo se f é quadrática, α pode ser determinado de uma maneira simples a partir da solução óptima de um problema de optimização unidimensional. Para explicação do processo, notemos que se f é quadrática, então

$$f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T H x$$

com $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^1$ tem-se

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \alpha d) &= c^T (\bar{x} + \alpha d) + \frac{1}{2} (\bar{x} + \alpha d)^T H (\bar{x} + \alpha d) \\ &= c^T \bar{x} + \alpha c^T d + \frac{1}{2} \bar{x}^T H \bar{x} + \alpha d^T (H \bar{x}) + \frac{1}{2} \alpha^2 d^T H d \\ &= f(\bar{x}) + \alpha (c + H \bar{x})^T d + \frac{1}{2} \alpha^2 d^T H d \end{aligned}$$

Donde

$$f(\bar{x} + \alpha d) = f(\bar{x}) + \alpha \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{1}{2} \alpha^2 d^T H d = \varphi(\alpha)$$

Para determinar o mínimo de φ sem restrições iguala-se a derivada de φ a zero. Mas

$$\varphi'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha (d^T H d) = -\nabla f(\bar{x})^T d$$

Então a resolução do programa (43) é feita da seguinte forma:

1. Se $d^T H d \leq 0$, então $\alpha = \alpha_{\max}$.
2. Se $d^T H d > 0$, então

$$\alpha = \min \left\{ -\frac{\nabla f(\bar{x})^T d}{d^T H d}, \alpha_{\max} \right\} \quad (44)$$

É fácil de concluir a simplicidade do processo para o caso da função ser quadrática. Note-se ainda que se $\alpha_{\max} = +\infty$ e $\alpha = \alpha_{\max}$, então a função quadrática é ilimitada inferiormente no seu conjunto de restrições. Finalmente, se f é linear, $H = 0$ e portanto $\alpha = \alpha_{\max}$ em cada iteração. O processo de determinação de α a partir de (43) é denominado *Critério de Minimização*.

Para ilustração deste critério, consideremos o exemplo anterior. Então

$$\bar{x} = (4 \ 0 \ 0 \ 4)^T$$

é a solução inicial e, como vimos, a direcção d determinada pelo algoritmo é

$$d = (-4 \ 4 \ 4 \ -4)^T$$

Portanto

$$\nabla f(\bar{x}) = (5 \ 1 \ 1 \ 5)^T \Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T d = -32$$

$$d^T H d = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 64 > 0$$

e

$$\min \left\{ \alpha_{\max}, -\frac{\nabla f(\bar{x})^T d}{d^T H d} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

Donde $\alpha = \frac{1}{2}$, que é exactamente igual ao valor determinado pelo critério de Armijo. O novo ponto é, como anteriormente,

$$\bar{x} + \frac{1}{2}d = (2 \ 2 \ 2 \ 2)^T$$

que é a solução óptima do programa não linear do exemplo.

24 Problema de Fluxo Multicomodidade de Custo Mínimo

Este problema considera vários produtos (ou mercadorias) a enviar através de um grafo $G = (V, E)$ directo. Se g é o número total de produtos, então as variáveis do problema x_{ijk} representam o fluxo do produto k a enviar através da aresta $(i, j) \in E$ ($k = 1, 2, \dots, g$). Tal como no problema de uma só mercadoria, as restrições de conservação de fluxo têm de ser verificadas em cada nó. Além disso há limites inferiores e superiores para cada variável e um custo unitário c_{ijk} dado para enviar o produto k do nó i para o nó j através da aresta $(i, j) \in E$. O problema assume também uma restrição linear das variáveis x_{ijk} em cada aresta, o que torna impossível a sua redução a g problemas de fluxo de custo mínimo simples. A formulação do problema multicomodidade é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = & \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ k \in \{1, \dots, g\}}} c_{ijk} x_{ijk} \\ \text{Sujeito a } & \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ijk} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{jik} = b_{ik}, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, g \\ & \sum_{k=1}^g x_{ijk} \leq a_{ij}, \quad (i, j) \in E \\ & l_{ijk} \leq x_{ijk} \leq u_{ijk}, \quad (i, j) \in E; \quad k = 1, \dots, g \end{aligned}$$

onde

$$a_{ij} < \sum_{k=1}^g (u_{ijk} - l_{ijk})$$

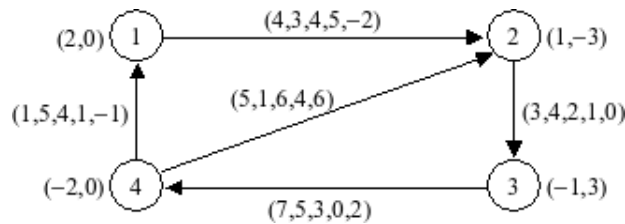
O grafo a seguir apresenta um problema de fluxo multicomodidade com $l_{ijk} = 0$ para todas arestas $(i, j) \in E$ e produtos $k = 1, 2$ ($g = 2$). Em cada aresta escrevemos as quantidades

$$(a_{ij}, u_{ij1}, u_{ij2}, c_{ij1}, c_{ij2})$$

e em cada nó

$$(b_{i1}, b_{i2})$$

representam as quantidades de fluxo existentes para os dois produtos do problema.



Notar que para cada produto $k = 1, 2$

$$\sum_{i=1}^m b_{ik} = 0$$

pelo que o problema multicomodidade é equilibrado. Além disso para cada aresta $(i, j) \in E$,

$$a_{ij} < \sum_{k=1}^2 (u_{ijk} - l_{ijk})$$

A formulação do problema é apresentada a seguir:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimize } z = & 5x_{121} + x_{231} + x_{411} + 4x_{421} - 2x_{122} + 2x_{342} - x_{412} + 6x_{422} & \\ \text{Sujeito a} & x_{121} & - x_{411} & = 2 \\ & -x_{121} + x_{231} & - x_{421} & = 1 \\ & & -x_{231} + x_{341} & = -1 \\ & & & -x_{341} + x_{411} + x_{421} & = -2 \\ & & & & x_{122} & - x_{412} & = 0 \\ & & & & -x_{122} + x_{232} & - x_{422} & = -3 \\ & & & & & -x_{232} + x_{342} & = 3 \\ & & & & & & -x_{342} + x_{412} + x_{422} = 0 \\ & x_{121} & & & + x_{122} & & \leq 4 \\ & & x_{231} & & & + x_{232} & \leq 3 \\ & & & x_{341} & & + x_{342} & \leq 7 \\ & & & & x_{411} & & + x_{412} & \leq 1 \\ & & & & & x_{421} & + x_{422} & \leq 5 \\ 0 \leq x_{121} \leq 3, & 0 \leq x_{122} \leq 4, & 0 \leq x_{231} \leq 4, & 0 \leq x_{232} \leq 2, & 0 \leq x_{341} \leq 5, & \\ 0 \leq x_{342} \leq 3, & 0 \leq x_{411} \leq 5, & 0 \leq x_{412} \leq 4, & 0 \leq x_{421} \leq 1, & 0 \leq x_{422} \leq 6 & \end{array}$$

Para escrever a forma matricial do problema, consideremos os seguintes vectores:

$$\begin{aligned} x &= [x^1, x^2, \dots, x^g]^T, & x^k &= [x_{ijk}] \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, g \\ c &= [c^1, c^2, \dots, c^g]^T, & c^k &= [c_{ijk}] \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, g \\ u &= [u^1, u^2, \dots, u^g]^T, & u^k &= [u_{ijk}] \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, g \\ l &= [l^1, l^2, \dots, l^g]^T, & l^k &= [l_{ijk}] \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, g \\ b &= [b^1, b^2, \dots, b^g]^T, & b^k &= [b_{ik}] \in \mathbb{R}^m, \quad k = 1, 2, \dots, g \end{aligned}$$

onde m é o número de nós do grafo, n é o número de arestas e g é o número de mercadorias (ou comodidades ou produtos). Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz incidência arco-nó definida anteriormente e I é a matriz identidade de ordem n , então a formulação matricial do problema de fluxo multicomodidade de custo mínimo é a seguinte:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimize } z = & (c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 + \dots + (c^g)^T x^g & \\ \text{Sujeito a} & Ix^1 + Ix^2 + \dots + Ix^g \leq a & \\ & Ax^1 & = b^1 \\ & & Ax^2 & = b^2 \\ & & & \ddots \\ & & & Ax^g = b^g \\ & l^k \leq x^k \leq u^k, & k = 1, 2, \dots, g \end{array} \quad (45)$$

Tendo em conta os vectores introduzidos anteriormente, podemos escrever a forma normal do problema de fluxo multicomodidade de custo mínimo:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimize } z = & c^T x & \\ \text{Sujeito a} & Ex + y = a & \\ & Bx = b & \\ & l \leq x \leq u & \end{array} \quad (46)$$

onde

$$E = [I \ I \ \dots \ I] \in \mathbb{R}^{n \times ng}, \quad B = \begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mg \times ng}$$

e $y \in \mathbb{R}^n$ é o vector das variáveis de desvio associadas às desigualdades.

25 Decomposição com Geração de Colunas

Consideremos o programa linear na forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && c^T x \\ &\text{Sujeito a} && Ax + y = b \\ &&& x \in X, \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (47)$$

onde X é um conjunto compacto e poliédrico, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $y, b \in \mathbb{R}^m$ e A é uma matriz de ordem $m \times n$.

Como X é poliédrico e compacto, então para qualquer vector $d \in \mathbb{R}^n$ o programa linear

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && d^T x \\ &\text{Sujeito a} && x \in X \end{aligned} \quad (48)$$

tem solução óptima. Na técnica de decomposição de geração de colunas, que iremos descrever a seguir, é forçoso que este programa seja muito fácil de resolver. Esse é o caso de X conter apenas limites superiores e inferiores ou restrições de transporte, afectação ou de redes.

Como X é compacto e poliédrico, então pelo chamado teorema da representação de poliedros,

$$\forall x \in X : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad (49)$$

com x^1, x^2, \dots, x^p os pontos extremos de X .

Substituindo o valor do vector x em (49) no programa linear (47), obtemos um programa linear em $\lambda \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} PL(\lambda, y) : & \text{Minimize} && \sum_{j=1}^p (c^T x^j) \lambda_j \\ & \text{Sujeito a} && \sum_{j=1}^p (Ax^j) \lambda_j + y = b \\ & && \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1 \\ & && \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p \\ & && y \geq 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Portanto o programa linear dado é equivalente a $PL(\lambda, y)$, cuja forma normal é

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && d^T z = v(z) \\ &\text{Sujeito a} && Ez = f \\ &&& z \geq 0 \end{aligned} \quad (51)$$

com:

$$z = \begin{bmatrix} \lambda \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+m}, \quad f = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

e

$$d = [d_j] \in \mathbb{R}^{p+m}, \quad E = [E \cdot j] \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (p+m)}$$

são definidos por

$$d_j = \begin{cases} c^T x^j, & j = 1, \dots, p \\ 0, & j = p+1, \dots, p+m \end{cases}, \quad E_{\cdot j} = \begin{cases} \begin{bmatrix} Ax^j \\ 1 \end{bmatrix}, & j = 1, \dots, p \\ \begin{bmatrix} e^{j-p} \\ 0 \end{bmatrix}, & j = p+1, \dots, p+m \end{cases}$$

e $e^t \in \mathbb{R}^m$ é o vector da base canónica definido por

$$e_i^t = \begin{cases} 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{se } i \neq t \end{cases}$$

A técnica de decomposição de Dantzig-Wolfe consiste exactamente em resolver o programa linear $PL(\lambda, y)$ usando o método simplex. Este processo é assim denominado por explorar a decomposição de qualquer solução admissível de X em termos dos pontos extremos desse conjunto. A dificuldade na implementação desse algoritmo está no número exponencial de variáveis $\lambda \in \mathbb{R}^p$ do programa $PL(\lambda, y)$. É no entanto possível, como aliás iremos ver a seguir, implementar o algoritmo gerando apenas as colunas da matriz E que vão sendo necessárias ao longo do processo. A denominação geração de colunas tem exactamente a ver com esta característica do processo.

Recordemos que o método simplex para a resolução do programa linear $PL(\lambda, y)$ apenas utiliza soluções básicas admissíveis. Uma solução básica para $Ez = f$ tem associado um conjunto de índices J , com $|J| = m+1$, de variáveis básicas z_j tal que a matriz base $B = [E_{\cdot j}]_{j \in J}$ é não singular. Então uma solução básica é dada por

$$z_j = \begin{cases} \bar{f}_i & \text{se } j \in J \\ 0 & \text{se } j \in L \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m+1$$

com $L = \{1, \dots, p+m\} - J$ e $\bar{f} \in \mathbb{R}^{m+1}$ o vector definido por

$$B\bar{f} = f$$

É importante notar que se z é uma solução básica e se $J_1 \subseteq J$ contém as variáveis λ_j básicas ($j \in J_1 \Leftrightarrow j \leq p$), então o valor da função objectivo associada a z é dado por

$$v(z) = \sum_{j \in J} d_j z_j = \sum_{j \in J_1} \lambda_j (c^T x^j).$$

Uma solução básica é admissível se as variáveis básicas são todas não negativas, isto é, $z_j \geq 0$ para todo $j \in J$. Então $y \geq 0$ e $\lambda \geq 0$ em qualquer solução básica admissível. Além disso

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j = 1$$

Portanto

$$\bar{x} = \sum_{j \in J_1} \lambda_j x^j \tag{52}$$

é um elemento do conjunto poliédrico X que é decomposto em apenas $|J_1|$ pontos extremos de X . Provámos assim que dada uma solução básica admissível do programa linear $PL(\lambda, y)$, é fácil de recuperar uma solução admissível do programa original. Além disso, o valor da função em \bar{x} é dado por:

$$c^T \bar{x} = c^T \left(\sum_{j \in J_1} \lambda_j x^j \right) = \sum_{j \in J_1} \lambda_j (c^T x^j) = v(z)$$

Para verificar se a solução básica admissível é óptima ou não, determina-se a solução dual $\pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ associada:

$$\pi = \begin{bmatrix} w \\ \alpha \end{bmatrix}$$

a partir de

$$B^T \pi = d_J \Leftrightarrow B^T \begin{bmatrix} w \\ \alpha \end{bmatrix} = d_J$$

Essa solução é dual admissível se e só se

$$\forall_{j \in L} \bar{d}_j = d_j - \begin{bmatrix} w \\ \alpha \end{bmatrix}^T E_{.j} \geq 0$$

Dois casos podem acontecer e são discutidos a seguir. Se $j \leq p$,

$$\bar{d}_j = c^T x^j - w^T A x^j - \alpha$$

ou seja

$$\bar{d}_j = (c - A^T w)^T x^j - \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Por outro lado para $j > p$, tem-se

$$\bar{d}_j = 0 - w^T e^{j-p} - \alpha \times 0 = -w_j$$

Tendo em conta a expressão de \bar{d}_j , a solução básica é dual admissível se e só se

- (CO) 1. $w \leq 0$
 2. $\min_{x \in X} (c - A^T w)^T x \geq \alpha$

Com efeito, 2. tem de ser verdadeira, pois x^j é ponto extremo de X e o mínimo da função linear

$$(c - A^T w)^T x$$

é alcançado num ponto extremo. Estas duas condições de (CO) fornecem um critério de optimalidade, segundo o qual uma solução básica admissível de $PL(\lambda, y)$ é óptima. É ainda importante notar que (CO) não utiliza os pontos extremos de X , mas apenas o ponto extremo óptimo do programa em 2.. Além disso este programa é muito simples de resolver, pois essa é uma das hipóteses consideradas na introdução do algoritmo.

Suponhamos agora que o critério (CO) não é satisfeito e portanto a solução básica admissível corrente não é a solução óptima de $PL(\lambda, y)$. Então

$$\bar{d}_s = \min\{\bar{d}_j < 0, \quad j \in L\} < 0$$

e há dois possíveis casos:

1. $\bar{d}_s = -w_{s-p}$
2. $\bar{d}_s = (c - A^T w)^T x^s - \alpha$

com x^s o ponto extremo de X que é solução óptima do programa

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & (c - A^T w)^T x \\ \text{Sujeito a} & x \in X \end{array} \quad (53)$$

Portanto a variável não básica z_s escolhida para passar a básica tem associada uma coluna $E_{.s}$ que tem de ser gerada. No primeiro caso ($\bar{d}_s = -w_{s-p}$) tem-se $E_{.s} = e^{s-p} \in \mathbb{R}^{m+1}$, enquanto que

$$E_{.s} = \begin{bmatrix} Ax^s \\ 1 \end{bmatrix}$$

no segundo caso. Note-se que x^s já tinha sido gerado ao resolver o programa linear (53), pelo que a geração da coluna $E_{.s}$ não requer um esforço computacional considerável. A coluna actualizada $\bar{E}_{.s}$ é calculada a partir de

$$B\bar{E}_{.s} = E_{.s} \quad (54)$$

Então

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{f}_i}{\bar{e}_{is}} : \bar{e}_{is} > 0 \right\} = \frac{\bar{f}_r}{\bar{e}_{rs}} \quad (55)$$

determina a variável z_t a sair da base.

No processo de actualização da solução básica admissível, o vector \bar{f} é primeiramente transformado por

$$\begin{cases} \bar{f}_r = \theta \\ \bar{f}_j = \bar{f}_j - \theta \bar{e}_{js}, j \neq r \end{cases} \quad (56)$$

O conjunto J é modificado para

$$J - \{t\} \cup \{s\}$$

pelo que a nova solução básica admissível é dada por

$$z_J = \bar{f}, z_L = 0$$

Na actualização da matriz base B , apenas é modificada a coluna $B_{.j}$ correspondente à variável básica z_t que passou a não básica e há quatro casos possíveis:

1. $s > p$ e $t > p$

$$B_{.j} = e^{t-p} \Rightarrow B_{.j} = e^{s-p}$$

2. $s > p$ e $t \leq p$

$$B_{.j} = \begin{bmatrix} Ax^t \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{.j} = e^{s-p}$$

3. $s \leq p$ e $t > p$

$$B_{.j} = e^{t-p} \Rightarrow B_{.j} = \begin{bmatrix} Ax^s \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. $s \leq p$ e $t \leq p$

$$B_{.j} = \begin{bmatrix} Ax^t \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{.j} = \begin{bmatrix} Ax^s \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uma nova iteração do algoritmo terá agora de ser efectuada com essa solução básica admissível.

Determinação de Uma Solução Básica Admissível Inicial Seja x^1 um ponto extremo de X e consideremos os vectores

$$\lambda = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T, y = b - Ax^1$$

Se

$$J = \{p + 1, \dots, p + m, 1\}$$

então

$$B = \begin{bmatrix} I & Ax^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é não singular}$$

e portanto obtém-se uma solução básica com variáveis básicas $y_i, i = 1, \dots, m$ e λ_1 . Essa solução será admissível se $y \geq 0$, ou seja, se $Ax^1 \leq b$. Se tal não acontecer, introduz-se um vector $h \in \mathbb{R}^m$ e uma variável artificial y_{m+1} tais que $y_{m+1} \geq 0$ e

$$h_i = \begin{cases} 0 & \text{se } (b - Ax^1)_i \geq 0 \\ -1 & \text{se } (b - Ax^1)_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

O problema Fase I tem a forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{j=1}^p (o^T x^j) \lambda_j + y_{m+1} \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^p (Ax^j) \lambda_j + y + h y_{m+1} = b \\ & \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad y \geq 0, \quad y_{m+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Seja r o índice tal que

$$(b - Ax^1)_r = \min\{(b - Ax^1)_i < 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

Então

$$J = \{p + 1, \dots, p + m, 1\} - \{p + r\} \cup \{p + m + 1\}$$

fornece uma solução básica admissível para o programa Fase I. A resolução desse programa permite concluir que o programa linear original é inadmissível ou então uma solução básica admissível para o $PL(\lambda, y)$ é determinada como solução óptima desse programa.

Exemplo Como ilustração da aplicação da técnica de decomposição de Dantzig-Wolfe, consideremos o programa linear retirado de [Bazarra et al., 1990]

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = \quad & -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{Sujeito a} \quad & x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -x_3 + x_4 \leq 2 \\ & 2x_3 + x_4 \leq 6 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Seja X o conjunto definido pelas terceira até à última desigualdades. Como as variáveis x_1 e x_2 só aparecem nas primeiras duas desigualdades e o mesmo acontece às variáveis x_3 e x_4 em relação às duas seguintes, então para qualquer vector $d \in \mathbb{R}^4$ a resolução do programa linear

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & d^T x \\ \text{Sujeito a} \quad & x \in X \end{aligned}$$

reduz-se a dois programas lineares com apenas duas variáveis

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & d_1x_1 + d_2x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & d_3x_3 + d_4x_4 \\ \text{Sujeito a} \quad & -x_3 + x_4 \leq 2 \\ & 2x_3 + x_4 \leq 6 \\ & x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

que podem ser resolvidos graficamente. Trata-se assim de um caso em que a técnica de decomposição pode ser recomendada. O programa linear dado pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z = \quad & -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{Sujeito a} \quad & x_1 + x_3 + y_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_4 + y_2 = 3 \\ & x \in X, y \geq 0 \end{aligned} \tag{57}$$

com $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, que é semelhante à apresentada em (47).

Como $x^1 = 0$ é um ponto extremo de X e satisfaz as desigualdades de (57), então

$$J = \{p+1, p+2, 1\}$$

fornece uma solução básica admissível para o programa $PL(\lambda, y)$. Mas

$$\begin{bmatrix} Ax^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz base inicial. As variáveis básicas são y_1 , y_2 e λ_1 e os seus valores correspondem ao vector \bar{f} dado por

$$B\bar{f} = f \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{f}_1 = 2 \\ \bar{f}_2 = 3 \\ \bar{f}_3 = 1 \end{cases}$$

Donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O vector das variáveis duais $\pi = \begin{pmatrix} w \\ \alpha \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$ é determinado a partir de

$$B^T \begin{pmatrix} w \\ \alpha \end{pmatrix} = d_J$$

Para calcular d_J tem-se

$$d_{p+1} = d_{p+2} = 0, d_1 = c^T x^1 = 0$$

Então $w = 0$, $\alpha = 0$. Como $w \leq 0$, é necessário resolver o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & (c - A^T w)^T x = -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{Sujeito a} & x \in X \end{array}$$

para verificar se o critério (CO) é satisfeito. Resolvendo graficamente dois programas lineares com duas variáveis, obtém-se a solução óptima do programa

$$x^2 = \left(2, \frac{3}{2}, 3, 0\right)^T$$

que é um ponto extremo de X . O valor óptimo do programa é

$$(c - A^T w)^T x^2 = c^T x^2 = -\frac{17}{2} < \alpha = 0$$

pelo que a solução básica admissível corrente não é óptima para $PL(\lambda, y)$. Então $z_2 = \lambda_2$ ($s = 2$) e

$$E_{.s} = \begin{bmatrix} Ax^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

pois

$$Ax^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar a variável básica que troca com λ_2 , calcula-se $\bar{E}_{.2}$ ($s = 2$) a partir de

$$B\bar{E}_{.2} = E_{.2} \Rightarrow \bar{E}_{.2} = E_{.2} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\theta = \min \left\{ \frac{2}{5}, \frac{3}{\frac{7}{2}}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = 1 \text{ e } t = p + 1$$

A variável y_1 troca com λ_2 e portanto J é actualizado para $J = \{2, p + 2, 1\}$, que induz a matriz base

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso o vector \bar{f} é actualizado a partir de

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \theta = \frac{2}{5} \\ \bar{f}_2 = \bar{f}_2 - \theta \bar{e}_{2s} = 3 - \frac{2}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{8}{5} \\ \bar{f}_3 = \bar{f}_3 - \theta \bar{e}_{3s} = 1 - \frac{2}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Então os valores das variáveis básicas são

$$\lambda_2 = \frac{2}{5}, y_2 = \frac{8}{5}, \lambda_1 = \frac{3}{5}$$

A solução $\bar{x} \in X$ correspondente aos valores λ_1 e λ_2 é

$$\bar{x} = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0 \right)$$

e o valor da função objectivo é $v(\bar{x}) = c^T \bar{x} = -\frac{17}{5}$.

Na segunda iteração determinam-se primeiramente as variáveis duais a partir de

$$B^T \pi = d_J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pois,

$$\begin{aligned} d_1 &= c^T x^1 = c^T 0 = 0 \\ d_2 &= c^T x^2 = [-2 \quad -1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{17}{2} \\ d_{p+2} &= 0 \end{aligned}$$

Então

$$w = \begin{bmatrix} -\frac{17}{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0$$

Para verificar o critério de optimalidade (CO) tem-se:

1. $w \leq 0$.
2. O programa

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (c - A^T w)^T x = -\frac{3}{10}x_1 - x_2 + \frac{7}{10}x_3 + x_4 \\ \text{Sujeito a} \quad & x \in X \end{aligned}$$

tem solução óptima $x^3 = (0 \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad 0)^T$, que se obtém resolvendo dois programas lineares graficamente.

Além disso

$$(c - A^T w)^T x^3 = -\frac{5}{2} < \alpha = 0$$

Portanto a solução básica admissível corrente não é óptima para $PL(\lambda, y)$ e a variável não básica escolhida é $z_3 = \lambda_3$ ($s = 3$). Para determinar a variável básica a trocar com z_3 , tem-se

$$E_{.3} = \begin{bmatrix} Ax^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B\bar{E}_{.3} = E_{.3} \Rightarrow \bar{E}_{.3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{f}_i}{\bar{e}_{is}} : \bar{e}_{is} > 0 \right\} = \frac{3}{5} \Rightarrow r = 3 \quad \text{e} \quad t = 1$$

Para obter a nova solução básica admissível, J é actualizado para

$$J = \{2, p+2, 3\}$$

Donde

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O novo vector \bar{f} é obtido a partir de:

$$\begin{cases} \bar{f}_3 = \theta = \frac{3}{5} \\ \bar{f}_1 = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \times 0 = \frac{2}{5} \\ \bar{f}_2 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Então os valores da variáveis básicas são:

$$\lambda_2 = \frac{2}{5}, \quad y_2 = \frac{1}{10}, \quad \lambda_3 = \frac{3}{5}$$

Assim se obteve o novo ponto $\bar{x} \in X$:

$$\bar{x} = \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = \left(\frac{4}{5}, \frac{21}{10}, \frac{6}{5}, 0 \right)^T$$

e o valor da função em \bar{x} é $v(\bar{x}) = -4.9$.

Na terceira iteração calcula-se o vector π das variáveis duais a partir de

$$B^T \pi = d_J \Leftrightarrow B^T \begin{bmatrix} w \\ \alpha \end{bmatrix} = d_J \Leftrightarrow \begin{cases} w = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \alpha = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Donde $w \leq 0$. O programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & (c - A^T w)^T x \\ \text{Sujeito a} & x \in X \end{array}$$

tem solução óptima

$$x^4 = \left(2 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

de valor

$$(c - A^T w)^T x^4 = -\frac{49}{10} < -\frac{5}{2}$$

pelo que a variável não básica escolhida é $z_4 = \lambda_4$. Então

$$E_{.4} = \begin{bmatrix} Ax^4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{E}_{.4} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

e

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{f}_i}{\bar{e}_{is}} : \bar{e}_{is} > 0 \right\} = \frac{1}{6} \Rightarrow r = 2 \quad \text{e} \quad t = p + 2$$

Portanto y_2 troca com λ_4 e obtém-se

$$J = \{2, 4, 3\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde \bar{f} é actualizada a partir de

$$\begin{cases} \bar{f}_2 = \frac{1}{6} \\ \bar{f}_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \\ \bar{f}_3 = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \bar{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Os valores das variáveis básicas são

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{6}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

a que corresponde o ponto $\bar{x} \in X$:

$$\bar{x} = \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 = (1 \ 2 \ 1 \ 0)^T$$

com valor da função objectivo $v(\bar{x}) = c^T \bar{x} = -5$.

Na iteração 4 as variáveis duais $w \in \mathbb{R}^2$ e α são calculadas a partir de

$$B^T \pi = d_J$$

e tem-se

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0$$

O programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & (c - A^T w)^T x = -3x_4 \\ \text{Sujeito a} & x \in X \end{array}$$

tem solução óptima $x^5 = 0$ e valor óptimo 0. Donde $w \leq 0$ e

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & (c - A^T w)^T x = 0 \geq \alpha = 0 \\ \text{Sujeito a} & x \in X \end{array}$$

Então a solução básica corrente é óptima para $PL(\lambda, y)$ e

$$\bar{x} = (1 \ 2 \ 1 \ 0)^T$$

é a solução óptima do programa linear dado. O valor óptimo é $c^T \bar{x} = -5$. □

Este exemplo sugere um tipo de problemas em que a técnica de decomposição pode ser muito útil. Consideremos o problema de optimização de redes com restrições laterais no grafo $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, \dots, m\}$ e $|E| = n$,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize } z = & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{Sujeito a} & \sum_{j: (i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in E \\ & Ax = d \end{array}$$

onde $x = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^n$ e $Ax = d$, ($A \in \mathbb{R}^{p \times n}$) representam as p restrições laterais. Se considerarmos o conjunto X definido pelas restrições de conservação de fluxo e capacidades, então cada um dos programas lineares que a técnica de decomposição necessita é exactamente um problema de fluxo de custo mínimo. Por isso esse processo de decomposição é muito recomendado para a resolução deste tipo de problemas, particularmente quando o número p de restrições laterais não é muito elevado. Como veremos na secção seguinte, este tipo de técnica tem também utilidade na resolução de problemas de fluxo multicomodidade de custo mínimo.

26 Resolução do Problema de Fluxo Multicomodidade de Custo Mínimo

Como referimos na secção 24, o problema de fluxo multicomodidade de custo mínimo tem a forma

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } z &= (c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 + \dots + (c^g)^T x^g \\
 \text{Sujeito a } & x^1 + x^2 + \dots + x^g + y = a \\
 & Ax^1 = b^1 \\
 & Ax^2 = b^2 \\
 & \dots \\
 & Ax^g = b^g \\
 & l^i \leq x^i \leq u^i, \quad i = 1, 2, \dots, g \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

onde cada vector $x^i \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $a, c^i, l^i, u^i \in \mathbb{R}^n$ são vectores dados, $b^i \in \mathbb{R}^m$, A é a matriz incidência nó-arco de ordem $m \times n$ do grafo $G = (V, E)$, $|V| = m$, $|E| = n$ e g é o número de mercadorias.

Consideremos os conjuntos poliédricos compactos X_i definidos por

$$x^i \in X_i \Leftrightarrow Ax^i = b^i, \quad l^i \leq x^i \leq u^i \quad (58)$$

Então, pelo teorema de representação de conjuntos poliédricos compactos, tem-se

$$\forall_{x^i \in X_i} x^i = \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} x^{ij}, \quad \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, p_i \quad (59)$$

com p_i o número de pontos extremos x^{ij} , $j = 1, \dots, p_i$, de X_i .

Se substituirmos a expressão de cada x^i em (59) pelo programa original obtemos o programa linear em λ e y :

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } & \sum_{j=1}^{p_1} \left((c^1)^T x^{1j} \right) \lambda_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{p_g} \left((c^g)^T x^{gj} \right) \lambda_{gj} \\
 \text{Sujeito a } & \sum_{j=1}^{p_1} (x^{1j}) \lambda_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{p_g} (x^{gj}) \lambda_{gj} + y = a \\
 PL(\lambda, y) : & \sum_{j=1}^{p_1} \lambda_{1j} = 1 \\
 & \dots \\
 & \sum_{j=1}^{p_g} \lambda_{gj} = 1 \\
 & y \geq 0 \\
 & \lambda_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, g, \quad j = 1, \dots, p_g
 \end{aligned}$$

Portanto $PL(\lambda, y)$ tem $(n + g)$ restrições de igualdade e $\left(n + \sum_{j=1}^g p_j \right)$ variáveis, o que é um número extremamente elevado. Tal como na secção anterior, este programa tem de ser resolvido usando a técnica de decomposição de Dantzig-Wolfe com geração de colunas.

Devido à definição (58) de cada elemento $x^i \in X_i$, chega-se imediatamente à conclusão que cada ponto extremo de X_i constitui uma árvore geradora admissível para o problema de fluxo de custo mínimo. Cada solução básica admissível para o problema $PL(\lambda, y)$ tem variáveis básicas de um de dois tipos:

1. Variável de folga y_{ij} com coluna $e^l \in \mathbb{R}^{n+g}$ na matriz base.
2. Variável λ_{ij} com coluna na matriz base da forma

$$\begin{bmatrix} x^{ij} \\ e^i \end{bmatrix}$$

com $e^i \in \mathbb{R}^g$ uma coluna da matriz identidade de ordem g e x^{ij} um ponto extremo de X_i .

O critério de optimalidade (CO) tem a forma

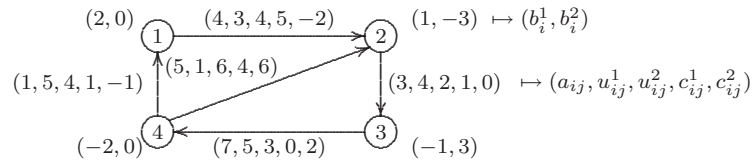
1. $w \leq 0$
2. $\min_{x^i \in X_i} (c^i - w)^T x^i \geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, g.$

Este último programa linear é equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (c^i - w)^T x^i \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax^i = b^i \\ & l^i \leq x^i \leq u^i \end{aligned}$$

ou seja, a um problema de fluxo de custo mínimo simples. Portanto para verificar o critério de optimalidade é necessário resolver g problemas de fluxo de custo mínimo simples.

O problema de fluxo multicomodidade é assim resolvido usando a implementação do método simplex discutida na última secção com as pequenas diferenças referidas nesta secção. Para ilustração desse procedimento, consideremos novamente o problema com duas mercadorias dado pelo seguinte grafo ($l_{ij} = 0$ para todo $(i, j) \in E$):



O problema $PL(\lambda, y)$ tem então a forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{j=1}^{p_1} \left((c^1)^T x^{1j} \right) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{p_2} \left((c^2)^T x^{2j} \right) \lambda_{2j} \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{p_1} (x^{1j}) \lambda_{1j} + \sum_{j=1}^{p_2} (x^{2j}) \lambda_{2j} + y = a \\ & \sum_{j=1}^{p_1} \lambda_{1j} = 1 \\ & \sum_{j=1}^{p_2} \lambda_{2j} = 1 \\ & \lambda_{1i} \geq 0, \lambda_{2j} \geq 0, y \geq 0, \quad i = 1, \dots, p_1, \quad j = 1, \dots, p_2 \end{aligned}$$

Portanto o problema tem $(n + 2)$ restrições de igualdade e $(n + p)$ variáveis, com $p = p_1 + p_2$ e p_i o número de pontos extremos do conjunto $X_i, i = 1, 2$, definido por (59).

Tal como na secção anterior, a solução básica admissível inicial tem associado o conjunto

$$J = \{p + 1, p + 2, p + 3, p + 4, p + 5, 1, p_1 + 1\}$$

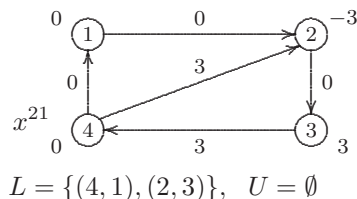
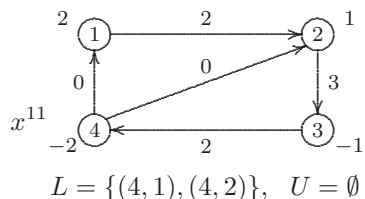
que corresponde às variáveis básicas

$$y_{12}, y_{23}, y_{34}, y_{41}, y_{42}, \lambda_{11}, \lambda_{21}$$

Então a matriz B é dada por

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} I_5 & x^{11} & x^{21} \\ \hline 0 & & I_2 \end{array} \right]$$

com I_k a matriz identidade de ordem k e x^{11} e x^{21} pontos extremos de X_i dados pelas árvores geradoras ($i = 1, 2$):



Portanto

$$x^{11} = (2, 3, 2, 0, 0)^T, \quad x^{21} = (0, 0, 3, 0, 3)^T$$

Para calcular os valores das variáveis básicas, determina-se $\bar{f} \in \mathbb{R}^7$ a partir de

$$B\bar{f} = f = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $a = (4, 3, 7, 1, 5)^T$, então

$$\bar{f} = (2 \ 0 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1)^T$$

As variáveis básicas são dadas por

$$y_{12} = 2; \quad y_{23} = 0; \quad y_{34} = 2; \quad y_{41} = 1; \quad y_{42} = 2, \quad \lambda_{11} = 1; \quad \lambda_{21} = 1$$

e a solução básica é admissível por serem todas não negativas.

A solução dual $\pi = [w \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T$ é determinada a partir de

$$B^T \pi = d_J$$

Mas

$$\begin{cases} d_{p+1} = d_{p+2} = d_{p+3} = d_{p+4} = d_{p+5} = 0 \\ d_1 = (c^1)^T x^{11} = (5 \ 1 \ 0 \ 1 \ 4)x^{11} = 13 \\ d_{p_1+1} = (c^2)^T x^{21} = (-2 \ 0 \ 2 \ 1 \ 6)x^{21} = 24 \end{cases}$$

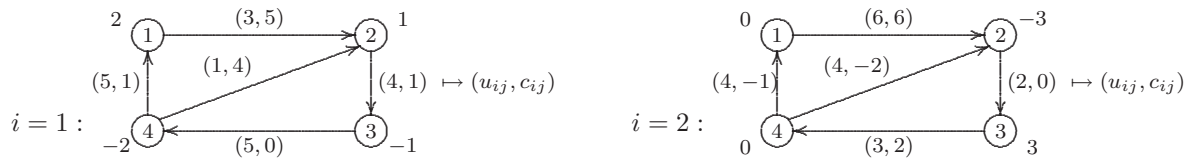
e $w \in \mathbb{R}^5$ e $\alpha_i, i = 1, 2$ são calculados por

$$\left[\begin{array}{c|c} I_5 & 0 \\ \hline (x^{11})^T & \\ (x^{21})^T & I_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Donde $w = 0, \alpha_1 = 13$ e $\alpha_2 = 24$. Como $w \leq 0$, então o critério de optimalidade é verificado se

$$\min_{x^i \in X_i} (c^i - w)^T x^i \geq \alpha_i, \quad i = 1, 2$$

Portanto há que resolver os dois problemas de fluxo de custo mínimo simples seguintes ($w = 0 \Rightarrow c^i - w = c^i$)

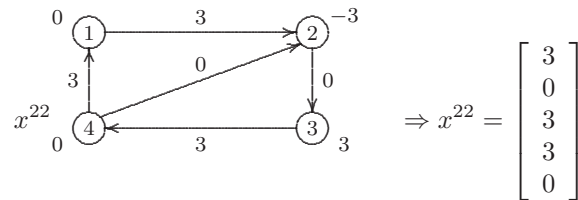


Para isso o método simplex deve ser usado com soluções básicas iniciais x^{11} e x^{21} respectivamente.

Ao resolver o subproblema 1 (X_1), constata-se que a solução inicial x^{11} é ótima. Além disso o valor ótimo respectivo é

$$(c^1)^T x^{11} = 13 = \alpha_1$$

O segundo subproblema requer uma iteração para obter a partir de x^{21} a solução ótima x^{22} dada pela árvore geradora:



Além disso o valor ótimo é

$$(c^2)^T x^{22} = -3 < \alpha_2 = 24$$

Portanto o critério (CO) não é verificado e a solução básica admissível corrente não é ótima para $PL(\lambda, y)$. A variável não básica z_s é então λ_{22} ($s = p_1 + 2$) e a coluna respectiva é:

$$E_{.s} = \begin{bmatrix} x^{22} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar a coluna transformada $\bar{E}_{.s}$ tem-se

$$B\bar{E}_{.s} = E_{.s} \Rightarrow \bar{E}_{.s} = [3 \ 0 \ 0 \ 3 \ -3 \ 0 \ 1]^T$$

Então

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{f}_i}{\bar{e}_{is}} : \bar{e}_{is} > 0 \right\} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = 4 \quad \text{e} \quad t = p + 4$$

e λ_{22} troca com y_{41} . O conjunto J é então actualizado para

$$J = \{p + 1, p + 2, p + 3, p_1 + 2, p + 5, 1, p_1 + 1\}$$

e a nova base é

$$B = \begin{bmatrix} e^1 & e^2 & e^3 & x^{22} & e^5 & x^{11} & x^{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso o vector \bar{f} é actualizado a partir de

$$\bar{f}_4 = \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_5 \\ \bar{f}_6 \\ \bar{f}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Donde os valores das variáveis básicas são os seguintes:

$$y_{12} = 1; y_{23} = 0; y_{34} = 2; y_{42} = 3; \lambda_{11} = 1; \lambda_{21} = \frac{2}{3}; \lambda_{22} = \frac{1}{3}$$

A solução correspondente no programa original é

$$\begin{aligned} x^1 &= \lambda_{11}x^{11} = x^{11} = (2 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0)^T \\ x^2 &= \lambda_{21}x^{21} + \lambda_{22}x^{22} = (1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2)^T \end{aligned}$$

e o valor da função objectivo é

$$(c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 = 28$$

Na segunda iteração calcula-se o vector $\pi = [w \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T$ das variáveis duais a partir de

$$B^T \pi = d_J \Rightarrow w = (0 \ 0 \ 0 \ -9 \ 0)^T; \alpha_1 = 13; \alpha_2 = 24$$

Então $w \leq 0$. Os dois subproblemas associados a X_i , $i = 1, 2$, têm a forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (c^i - w)^T x^i \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax^i = b^i \\ & 0 \leq x^i \leq u^i \end{aligned}$$

Mas

$$1. \ c^1 - w = (5 \ 1 \ 0 \ 10 \ 4)^T \Rightarrow \text{solução óptima } x^{11} \text{ (inicial) de valor óptimo igual a } \alpha_1.$$

$$2. \ c^2 - w = (2 \ 0 \ 2 \ 8 \ 6)^T \Rightarrow \text{solução óptima } x^{22} \text{ (inicial) de valor óptimo igual a } \alpha_2.$$

Então a solução básica admissível corrente é óptima para $PL(\lambda, y)$ e portanto

$$x^1 = (2 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0), \quad x^2 = (1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2)$$

é solução óptima do problema de fluxo multicomodidade do exemplo e o valor óptimo é 28.

Chegámos assim à conclusão que o problema de fluxo multicomodidade se resolve usando a técnica de decomposição de Dantzig-Wolfe com geração de colunas. O processo consiste essencialmente numa implementação eficiente do método simplex para a resolução de um programa linear $PL(\lambda, y)$ equivalente ao problema de fluxo multicomodidade. Em cada iteração a matriz base B é muito esparsa e de ordem $(n + g)$, com n o número de arestas do grafo $G = (V, E)$ e g o número de mercadorias. Cada iteração requer:

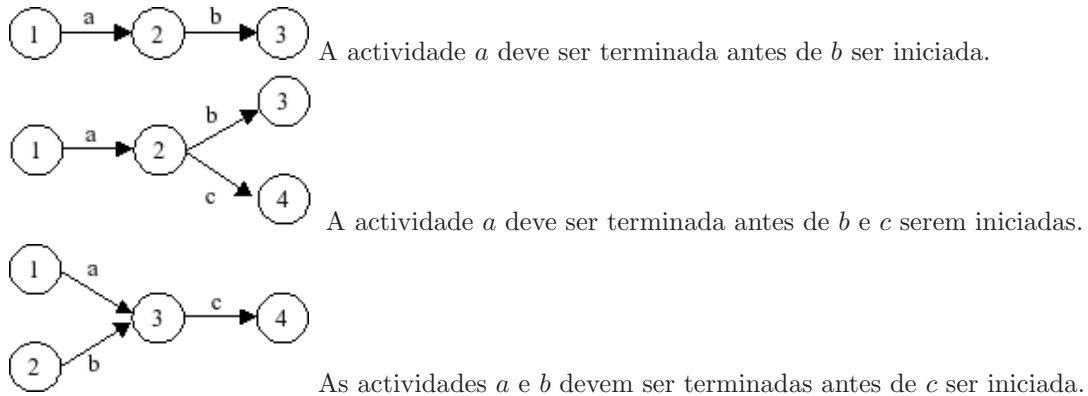
1. A resolução de dois sistemas com B e a sua transposta B^T .
2. A resolução de g problemas de fluxo de custo mínimo simples usando o método simplex.

É importante acrescentar que a decomposição LU matriz B é usada e actualizada em cada iteração na resolução dos sistemas com B e B^T de acordo com o processo descrito em [Júdice et al., 2006]. Em cada iteração $k \geq 2$, para cada problema de fluxo mínimo simples, a solução inicial do método simplex é exactamente a solução óptima do problema de fluxo respectivo na iteração anterior. Além disso na primeira iteração o método simplex é iniciado com o ponto extremo do conjunto X_i respectivo usado na construção da matriz base original.

27 Problemas de Planeamento - Método do Caminho Crítico

A gestão de projectos de grandes dimensões requer o planeamento, escalonamento e coordenação de várias actividades interrelacionadas. Quando é conhecido o tempo de duração de cada uma das actividades, o *Método do Caminho Crítico*, conhecido por CPM (do inglês “critical-path method”), é normalmente usado na determinação do tempo que o projecto demora a ser concluído. O método do caminho crítico tem sido usado em muitas aplicações reais, nomeadamente na construção de edifícios, estradas, piscinas e navios, mudança de instalações, lançamento de voos espaciais, instalação de sistemas computacionais e fusão de instituições.

As várias actividades que constituem o projecto são representadas numa *Rede de Precedências*, que identifica os momentos em que as actividades podem ser executadas e a sua duração. Como é natural o projecto estará concluído quando todas as actividades estiverem terminadas. Para cada actividade, existe um conjunto de *Actividades Precedentes*, que devem ser completadas antes desta ser iniciada. Neste tipo de problemas as actividades podem ser representadas por arcos e os nós são usados para identificar o início e/ou conclusão de uma ou várias das actividades. Os seguintes exemplos mostram como se pode estabelecer essas relações de precedência



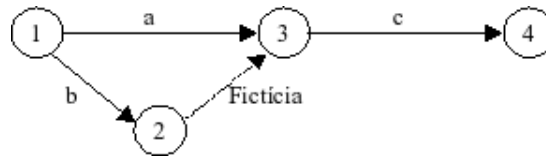
A construção da rede de precedências deve obedecer às seguintes regras:

1. O nó 1, designado por nó inicial, representa o início do projecto.
2. O nó de numeração mais elevada, designado por nó terminal, representa a conclusão do projecto.
3. O nó que representa a conclusão de uma actividade tem uma numeração mais elevada do que o que representa o início da mesma actividade.
4. Cada actividade é representada por um e um só arco.
5. Dois nós não podem ser ligados por mais de um arco.

Na construção da rede de precedências pode ser necessário o recurso a actividades fictícias para garantir a verificação das regras 4 e 5. Suponhamos que existem duas actividades *a* e *b* precedentes de uma mesma actividade *c* e que são iniciadas ao mesmo tempo:



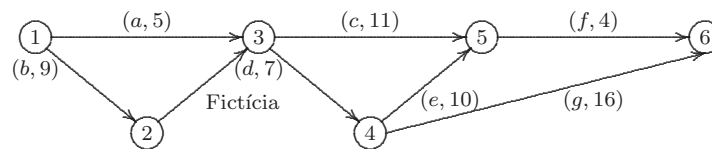
Como a regra 5 é violada, introduzimos uma actividade fictícia, de acordo com a seguinte figura



Para ilustrar a construção de uma rede de precedências, consideremos um problema com sete actividades

Actividades	Precedências	Duração (meses)
<i>a</i>	-	5
<i>b</i>	-	9
<i>c</i>	<i>a</i> e <i>b</i>	11
<i>d</i>	<i>a</i> e <i>b</i>	7
<i>e</i>	<i>d</i>	10
<i>f</i>	<i>c</i> e <i>e</i>	4
<i>g</i>	<i>d</i>	16

A rede de precedências associada a este problema é apresentada no grafo a seguir



Para calcularmos a duração do projecto, temos necessidade de calcular em cada nó j o *Tempo Mais Cedo* de ocorrência, que corresponde ao menor tempo possível que permite a conclusão de todas as actividades que têm j por nó final. O tempo mais cedo de ocorrência do nó 1 é igual a zero e o tempo mais cedo de ocorrência dos outros nós j , que denotamos por TMC_j , podem ser calculados recursivamente a partir da fórmula

$$TMC_j = \max_{i:(i,j) \in E} \{TMC_i + c_{ij}\}, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

com n o número de nós da rede de precedências, E o conjunto de arcos e c_{ij} a duração da actividade associada ao arco (i, j) . É de notar que, pela regra 3 da construção da rede de precedências, todos os arcos são da forma (i, j) com $i < j$ e por isso podemos calcular sucessivamente $TMC_1, TMC_2, TMC_3, \dots, TMC_n$. No exemplo introduzido nesta secção temos

$$\begin{aligned} TMC_1 &= 0 \\ TMC_2 &= \max\{TMC_1 + c_{12}\} = \max\{0 + 9\} = \max\{9\} = 9 \\ TMC_3 &= \max\{TMC_1 + c_{13}, TMC_2 + c_{23}\} = \max\{0 + 5, 9 + 0\} = \max\{5, 9\} = 9 \\ TMC_4 &= \max\{TMC_3 + c_{34}\} = \max\{9 + 7\} = \max\{16\} = 16 \\ TMC_5 &= \max\{TMC_3 + c_{35}, TMC_4 + c_{45}\} = \max\{9 + 11, 16 + 10\} = \max\{20, 26\} = 26 \\ TMC_6 &= \max\{TMC_4 + c_{46}, TMC_5 + c_{56}\} = \max\{16 + 16, 26 + 4\} = \max\{32, 30\} = 32 \end{aligned}$$

Como o nó 6 representa a conclusão do projecto, o tempo de duração do projecto é no mínimo de 32 meses.

É fácil de ver que se forem alteradas as durações de algumas actividades, a conclusão do projecto é alterada. Por exemplo, se a actividade g for dilatada, o projecto durará mais tempo a ser executado. Por outro lado, também existem actividades que podem ser dilatadas por mais algum tempo sem influenciar a conclusão do projecto, como é o caso da actividade f que pode ser dilatada em dois meses. As actividades que ao serem dilatadas provocam automaticamente um atraso na conclusão do projecto são designadas por *Actividades*

Críticas. A determinação dessas actividades é fundamental para a execução eficiente do projecto. Para esse fim, introduzimos em cada nó i o conceito de *Tempo Mais Tarde* de ocorrência, que corresponde ao maior tempo possível que permite a conclusão do projecto sem atrasos. O tempo mais tarde de ocorrência do nó final é igual à duração do projecto. Os tempos mais tarde de ocorrência dos outros nós i da rede, que denotamos por TMT_i , podem ser calculados recursivamente a partir da fórmula

$$TMT_i = \min_{i:(i,j) \in E} \{TMT_j - c_{ij}\}, \quad j = n, n-1, \dots, 2$$

com n o número de nós da rede de precedências, E o conjunto de arcos e c_{ij} a duração da actividade associada ao arco (i, j) . No exemplo introduzido nesta secção temos

$$\begin{aligned} TMT_6 &= 32 \\ TMT_5 &= \min\{TMT_6 - c_{56}\} = \min\{32 - 4\} = \min\{28\} = 28 \\ TMT_4 &= \min\{TMT_5 - c_{45}, TMT_6 - c_{46}\} = \min\{28 - 10, 32 - 16\} = \min\{18, 16\} = 16 \\ TMT_3 &= \min\{TMT_4 - c_{34}, TMT_5 - c_{35}\} = \min\{16 - 7, 28 - 11\} = \min\{9, 17\} = 9 \\ TMT_2 &= \min\{TMT_3 - c_{32}\} = \min\{9 - 0\} = \min\{9\} = 9 \\ TMT_1 &= \min\{TMT_2 - c_{12}, TMT_3 - c_{13}\} = \min\{9 - 9, 9 - 5\} = \min\{0, 4\} = 0 \end{aligned}$$

A *Flutuação Total* de uma actividade associada ao arco (i, j) representa a dilatação dessa actividade sem alterar a conclusão do projecto. A flutuação total da actividade associada a (i, j) , que denotamos por FT_{ij} , pode ser facilmente calculada a partir da expressão

$$FT_{ij} = TMT_j - TMC_i - c_{ij}, \quad j = n, n-1, \dots, 2$$

No exemplo que considerámos nesta secção temos

$$\begin{aligned} FT_{12} &= TMT_2 - TMC_1 - c_{12} = 9 - 0 - 9 = 0 \\ FT_{13} &= TMT_3 - TMC_1 - c_{13} = 9 - 0 - 5 = 4 \\ FT_{23} &= TMT_3 - TMC_2 - c_{23} = 9 - 9 - 0 = 0 \\ FT_{34} &= TMT_4 - TMC_3 - c_{34} = 16 - 9 - 7 = 0 \\ FT_{35} &= TMT_5 - TMC_3 - c_{35} = 28 - 9 - 11 = 8 \\ FT_{45} &= TMT_5 - TMC_4 - c_{45} = 28 - 16 - 10 = 2 \\ FT_{46} &= TMT_6 - TMC_4 - c_{46} = 32 - 16 - 16 = 0 \\ FT_{56} &= TMT_6 - TMC_5 - c_{56} = 32 - 26 - 4 = 2 \end{aligned}$$

Assim se conclui que a actividade a correspondente ao arco $(1, 3)$ pode ser dilatada em 4 meses sem alterar a data de conclusão do projecto. Do mesmo modo, as actividades c , e e f podem ser dilatadas em 8, 2 e 2 meses, respectivamente. Por fim, as actividades b , d , g e a actividade fictícia são críticas, pois qualquer dilatação numa das actividades provoca um atraso na execução do projecto.

O caminho que se obtém a partir dos arcos correspondentes às actividades críticas entre o nó inicial e o nó terminal é designado por *Caminho Crítico*. No exemplo desta secção, sabemos que as actividades b , d , g e a actividade fictícia são críticas. Com os arcos correspondentes a estas actividades obtemos o caminho crítico

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Mostrámos assim que é possível determinar o caminho crítico e a duração de um projecto de um modo muito simples baseado na teoria dos grafos. Seguidamente apresentamos uma formulação de programa linear deste problema. Para isso representamos por x_j a data de ocorrência do nó j . As restrições desse programa impedem

que a data de ocorrência de um determinado nó seja anterior às das actividades que lhe são imediatamente antecedentes. Deste modo, associamos a cada arco da rede a restrição

$$x_j - x_i \geq c_{ij}$$

O objectivo deste problema consiste em minimizar o tempo de duração do projecto, que é dado pela diferença entre a data de ocorrência do nó final (x_n) e a data de ocorrência do nó inicial (x_1). A formulação matemática do problema é

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= x_n - x_1 \\ \text{Sujeito a } & x_j - x_i \geq c_{ij}, \quad (i, j) \in E \\ & x_j \geq 0, \quad j \in V \end{aligned}$$

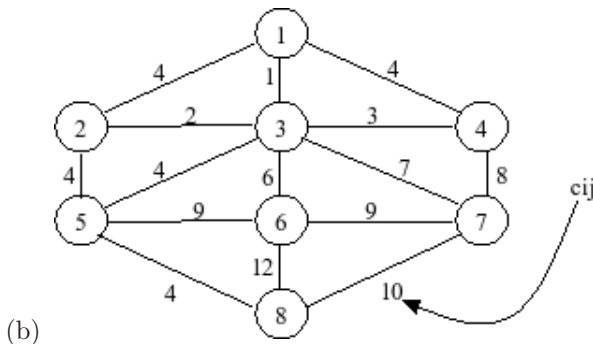
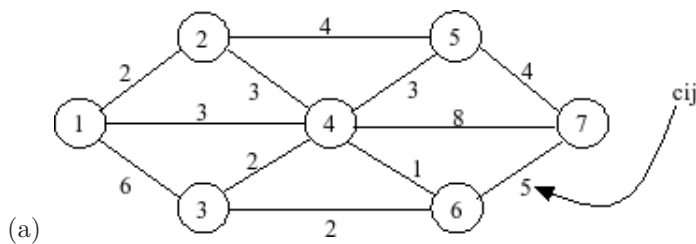
com $V = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto dos vértices da rede e E o conjunto de arcos. Em relação ao exemplo desta secção obtemos o seguinte programa linear

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z &= x_6 - x_1 \\ \text{Sujeito a } & x_2 - x_1 \geq 9 \\ & x_3 - x_1 \geq 5 \\ & x_3 - x_2 \geq 0 \\ & x_4 - x_3 \geq 7 \\ & x_5 - x_3 \geq 11 \\ & x_5 - x_4 \geq 10 \\ & x_6 - x_4 \geq 16 \\ & x_6 - x_5 \geq 4 \\ & x_j \geq 0, \quad j \in V \end{aligned}$$

O valor óptimo deste programa linear é $z = 32$ e as variáveis x_j da solução óptima assumem os valores TMT_j ou TMC_j para todo o j .

Exercícios

1. Determine a árvore geradora de custo mínimo dos seguintes grafos não orientados usando o algoritmo de Kruskal.

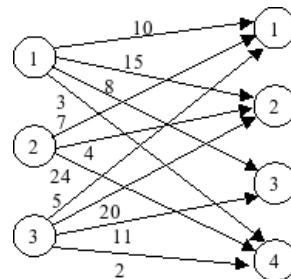


2. Um banco deseja ligar terminais de computador de cada uma das suas agências a um computador na sua rede, usando linhas telefónicas especiais com dispositivos de telecomunicações. A ligação de qualquer agência com a sede pode ser directa ou indirecta através de uma outra agência. No entanto é exigido que cada agência fique ligada por alguma via à sede. O custo das linhas telefónicas especiais é directamente proporcional ao comprimento total utilizado, onde a distância entre qualquer par de agências é dada na tabela seguinte:

	sede	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
sede	–	190	70	115	270	160
A_1	190	–	100	240	215	50
A_2	70	100	–	140	120	220
A_3	115	240	140	–	175	80
A_4	270	215	120	175	–	310
A_5	160	50	220	80	310	–

Pretende-se saber como se deve fazer a ligação das agências através das linhas especiais por forma a ligar cada agência (directa ou indirectamente) à sede, de modo a que o custo total seja mínimo.

- (a) Indique de que tipo de problema de optimização em redes se trata.
- (b) Resolva esse problema de optimização, usando o processo que achar mais conveniente.
3. Uma companhia distribuidora possui três fábricas de leite. A produção diária da fábrica i para $i = 1, 2, 3$ é, quando muito, 350, 50, 700 milhares de litros respectivamente. Todos os dias a companhia tem de fornecer 4 armazéns com pelo menos 200, 350, 300 e 210 milhares de litros de leite fresco, pelas imposições do público.



O esquema anterior mostra os custos de transporte de mil litros de leite entre cada fábrica e cada armazém. Note que não existe via de acesso da fábrica 2 para o armazém 3.

- (a) Formule o problema em termos de programação linear.
- (b) Determine uma solução básica inicial sem recorrer à Fase I.
- (c) Determine a solução óptima do problema.
4. Existem três reservatórios R_1 , R_2 , R_3 e R_4 que diariamente são fornecidos de 20, 13, 7 e 5 milhões litros de água, respectivamente. Diariamente é preciso abastecer três cidades A , B e C cujos os consumos são de 15, 15 e 15 milhões de litros, respectivamente. Os custos de bombagem (por milhão de litros) são dados

na seguinte tabela:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>R</i> ₁	7	5	6
<i>R</i> ₂	10	7	6
<i>R</i> ₃	9	12	8
<i>R</i> ₄	5	2	7

- (a) Formule o modelo como um problema de transportes.
 (b) Determine uma solução básica admissível.
 (c) Escreva o dual do problema formulado em a).
 (d) Determine a solução óptima do problema.
5. Uma empresa, constituída por 5 fábricas, decidiu-se pela produção de 3 novos produtos, *A*, *B* e *C*. Os custos unitários de produção estimados nas fábricas são (em euros/ton.):

Fábrica \ Produto	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	90	62	76
2	82	58	70
3	92	64	80
4	84	56	-
5	86	58	-

O produto *C* não pode ser produzido nas fábricas 4 e 5. A previsão das vendas diárias é de 5, 3 e 4 tons., respectivamente. A capacidade das fábricas é 2, 3, 2, 3 e 5 tons. por dia.

- (a) Formalize o problema como um modelo de transporte por forma a obter a localização das quantidades a produzir dos 3 novos produtos, minimizando o custo total de produção.
 (b) Determine a solução óptima do problema.
6. Resolva os seguintes problemas de transporte:

(a)

<i>O</i> \ <i>D</i>	1	2	3	Oferta
1	4	3	7	25
2	8	6	6	5
3	6	8	7	10
Procura	15	15	10	

(b)

<i>O</i> \ <i>D</i>	1	2	3	Oferta
1	8	9	7	20
2	8	9	6	30
3	5	8	3	40
4	4	9	6	40
Procura	30	70	30	

7. Considere o seguinte problema de transporte não equilibrado em que a oferta total é maior que a procura total:

<i>O</i> \ <i>D</i>	1	2	3	Oferta
1	1	6	2	20
2	0	4	5	40
3	2	3	3	30
Procura	30	20	20	

Para cada unidade da origem *i* que não for expedida, incorre-se um custo de armazenagem. Sejam estes custos, por unidade, de 5, 4 e 3, respectivamente, nas origens 1, 2 e 3. Determine a solução óptima que minimiza o custo total.

8. Em períodos de ponta o director de tráfego da RODOVIA vê-se frequentemente perante o problema de afectar os autocarros de passageiros estacionados em três garagens da empresa a três localidades da sua rede de exploração. Os dados seguintes representam o número de autocarros usualmente necessários em cada uma das localidades e o número de minutos necessários para um autocarro atingir uma localidade via cada rota possível.

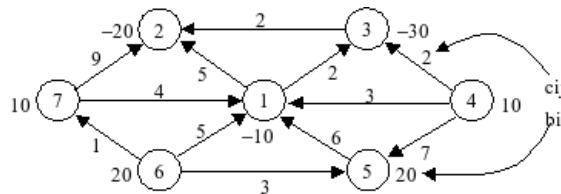
Garagens	Localidades			Autocarros disponíveis
	L_1	L_2	L_3	
G_1	12	14	12	6
G_2	14	12	15	9
G_3	19	18	19	5
Autocarros necessários	8	4	8	20

Como deve o director de tráfego afectar os autocarros disponíveis a fim de minimizar o tempo total necessário para se atingir aquelas três localidades.

9. Numa cidade há três fábricas F_1 , F_2 e F_3 que produzem diariamente 20, 40 e 40 toneladas de um determinado produto respectivamente e o fornecem a 3 postos de venda V_1 , V_2 e V_3 . Sabe-se que cada um dos postos deve vender 10, 40 e 50 toneladas desse produto respectivamente e que os custos unitários de transporte das fábricas para os postos de venda são dados pela seguinte tabela

	j		
i	V_1	V_2	V_3
F_1	10	4	8
F_2	12	3	7
F_3	1	3	2

- (a) Formule o problema de transportes correspondente.
 (b) Escreva esse problema na forma normal.
 (c) Mostre que esse problema tem solução óptima.
 (d) Determine a solução óptima.
10. Considere o problema da determinação do fluxo de custo mínimo na seguinte rede



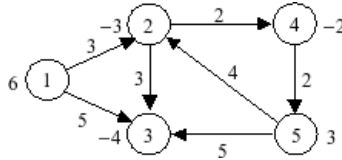
- (a) Determine a árvore geradora de custo mínimo.
 (b) Verifique se é admissível a solução básica associada à árvore geradora da alínea anterior.
 (c) Escreva o problema Fase I associado à árvore geradora de custo mínimo com ou sem nós adicionais.
 (d) Mostre que a árvore geradora definida pelos arcos

$$J = \{(1, 2), (1, 3), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}$$

é admissível.

- (e) Determine a solução óptima do problema de fluxo de custo mínimo usando o método simplex e iniciando com a solução básica definida na alínea anterior.

11. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde o número real associado a cada nó i representa a quantidade de fluxo b_i e o número real c_{ij} associado a cada aresta (i, j) representa o respectivo custo unitário.

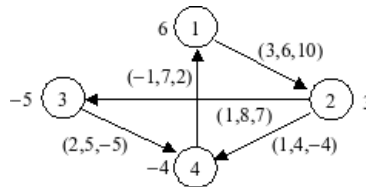
- (a) Determine a árvore geradora de custo mínimo.
 (b) Mostre que a árvore geradora de custo mínimo não fornece uma solução óptima para o problema de fluxo de custo mínimo.
 (c) Escreva a formulação matemática de um problema M-Grande associado à árvore geradora de custo mínimo.
 (d) Mostre que a partição $\{J, L\}$ de E definida por

$$J = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 3)\}, \quad L = E - J$$

fornece uma solução básica admissível para o problema de fluxo de custo mínimo.

- (e) Determine a solução óptima do problema de fluxo de custo mínimo usando o método simplex com a solução inicial obtida em (d).

12. Considere o problema de fluxo de custo mínimo associado à rede $G = (V, E)$



onde em cada aresta $(i, j) \in E$ as componentes de (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) representam os limites inferiores e superiores e o custo unitário associados e o número real associado a cada nó $i \in V$ representa a quantidade de fluxo b_i .

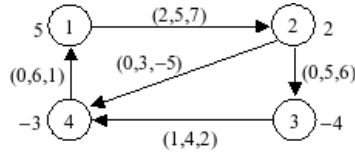
- (a) Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(2, 3), (2, 4), (4, 1)\}, \quad L = \{(3, 4)\}, \quad U = \{(1, 2)\}$$

fornece uma solução básica admissível.

- (b) Determine a solução óptima do problema usando o método simplex e iniciando com a solução básica apresentada na alínea (a).

13. Considere o problema de fluxo de custo mínimo associado à rede $G = (V, E)$



onde em cada aresta $(i, j) \in E$ as componentes de (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) representam os limites inferiores e superiores e o custo unitário associados e o número real associado a cada nó $i \in V$ representa a quantidade de fluxo b_i .

(a) Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}, \quad L = \{(4, 1)\}, \quad U = \{(2, 4)\}$$

fornece uma solução básica não admissível.

(b) Apresente o problema Fase I de fluxo de custo mínimo associado à solução básica da alínea a).

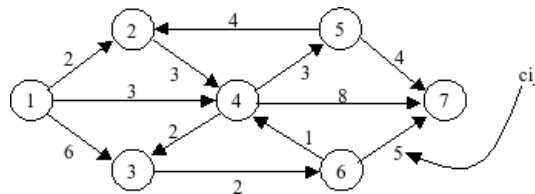
(c) Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(2, 3), (2, 4), (4, 1)\}, \quad L = \{(3, 4)\}, \quad U = \{(1, 2)\}$$

fornece uma solução básica admissível.

(d) Determine a solução ótima do problema usando o método simplex e iniciando com a solução apresentada na alínea (c).

14. Considere o problema da determinação do caminho mais curto entre o nó 1 e o nó 7 no seguinte grafo orientado

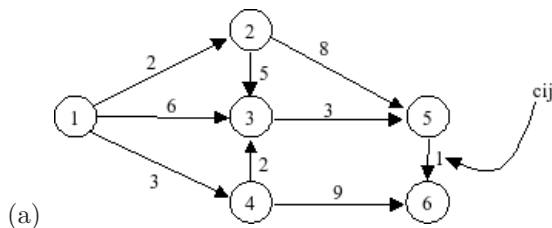


(a) Formule o problema como um problema de fluxo de custo mínimo.

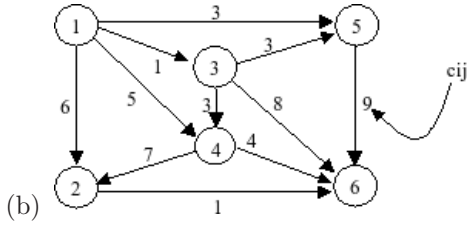
(b) Determine a solução ótima usando o algoritmo de Dijkstra.

(c) Determine a solução básica ótima associada ao problema de fluxo de custo mínimo correspondente ao problema do caminho mais curto do nó 1 ao nó 7.

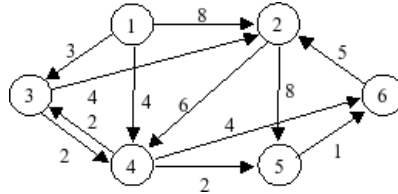
15. Determine o caminho mais curto do nó 1 aos nós restantes nas seguintes redes



(a)



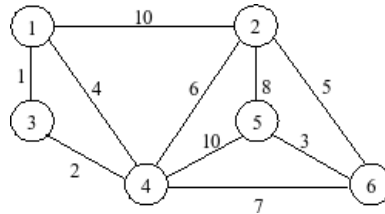
16. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde o número real associado a cada aresta (i, j) representa o custo da ligação de i para j .

- Determine os caminhos mais curtos do nó 1 a cada um dos restantes nós da rede, usando o algoritmo de Dijkstra.
- Mostre que o caminho mais curto do nó 1 ao nó 6 é equivalente a um problema de fluxo de custo mínimo e apresente esse problema.
- Determine uma árvore geradora de custo mínimo associada à solução óptima do problema de fluxo de custo mínimo referido na alínea anterior.

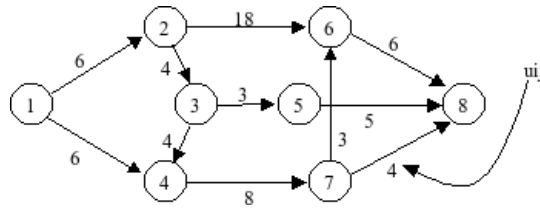
17. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



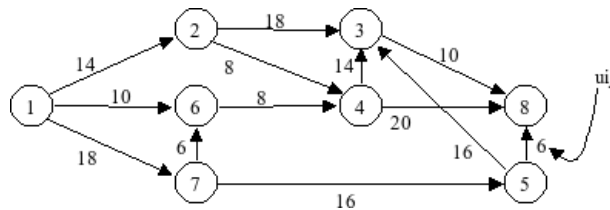
onde o número real associado a cada aresta (i, j) representa o custo da ligação de i para j .

- Determine os caminhos mais curtos do nó 1 a cada um dos restantes nós da rede, usando o algoritmo de Dijkstra.
- Mostre que o caminho mais longo do nó 1 ao nó 6 é equivalente a um problema de fluxo de custo mínimo e apresente esse problema.
- Determine a árvore geradora de custo máximo.
- Mostre que a árvore geradora de custo máximo fornece uma solução básica admissível para o problema de fluxo de custo mínimo apresentado na alínea (b).
- Determine o caminho mais longo do nó 1 ao nó 6.

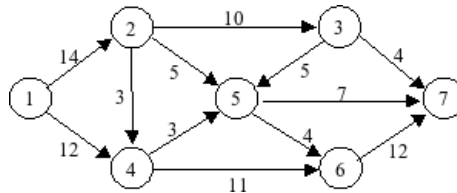
18. Considere o problema de fluxo máximo do nó 1 ao nó 8 associado à seguinte rede, onde em cada aresta estão representadas as respectivas capacidades



- (a) Formule o problema como um problema de fluxo de custo mínimo.
 (b) Determine a solução ótima do problema de fluxo máximo.
19. Considere o seguinte grafo directo, onde estão representados os valores da capacidade associada a cada arco. Determine o fluxo máximo e o corte mínimo do nó 1 ao nó 8.

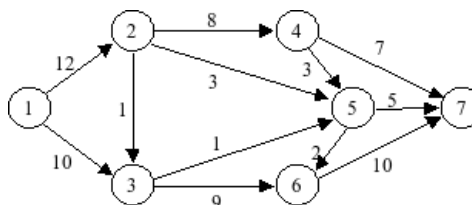


20. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde o número real em cada aresta (i, j) representa a capacidade máxima u_{ij} .

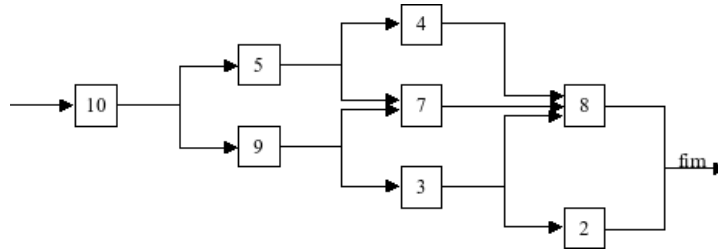
- (a) Formule o problema de fluxo máximo entre o nó 1 e o nó 7 como um problema de fluxo de custo mínimo.
 (b) Determine o fluxo máximo entre o nó 1 e o nó 7 usando o algoritmo de Ford-Fulkerson.
21. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde o número real em cada aresta (i, j) representa a capacidade máxima u_{ij} .

- (a) Formule o problema de fluxo máximo entre o nó 1 e o nó 7 como um problema de fluxo de custo mínimo.
- (b) Mostre que o problema de fluxo máximo entre o nó 1 e o nó 7 tem solução.
- (c) Determine o fluxo máximo entre o nó 1 e o nó 7 usando o algoritmo de Ford-Fulkerson.

22. Considere o processo produtivo representado pela figura a seguir que indica os vários caminhos que um produto pode tomar no seu trajecto produtivo numa fábrica. Os números em cada cela representam o limite superior de itens por hora que podem ser processados nessa secção.



- (a) Qual é o número máximo de itens por hora que a fábrica pode produzir?
- (b) Que alterações deve tentar melhorar?

23. A prova de natação de 4×100 metros estilos requer quatro nadadores que sucessivamente devem nadar 100 metros costas, bruços, mariposa e estilo livre. Um treinador dispõe de 4 nadadores cujos tempos em segundos em cada um dos estilos são apresentados na seguinte tabela:

Nadador	Estilo			
	Costas	Bruços	Mariposa	Livre
1	65	73	63	57
2	67	70	65	58
3	68	72	69	55
4	70	75	70	59

- (a) Formule o problema de afectação correspondente à escolha dos nadadores para cada uma das provas.
- (b) Mostre que esse problema de afectação se reduz a um problema de transportes.
- (c) Indique a escolha do treinador resolvendo o correspondente problema com o algoritmo húngaro.

24. Numa fábrica foram instaladas 4 novas máquinas dispondo para a sua laboração de 5 empregados. A direcção da fábrica tem por objectivo, estabelecer uma afectação empregado-máquina. Com esta finalidade e após vários testes, estimou-se a seguinte matriz de custos:

Máquina \ Empregado	1	2	3	4	5
1	35	95	87	-	-
2	53	90	85	65	69
3	91	93	73	75	73
4	15	20	22	30	42

onde o símbolo “-” significa que o empregado não tem formação suficiente para operar a máquina respectiva.

- (a) Apresente a formulação do problema.
 (b) Determine a solução óptima usando o método húngaro.

25. Resolva os seguintes problemas de afectação usando os métodos simplex e húngaro:

(a)

$i \setminus i$	1	2	3
1	8	9	7
2	4	5	4
3	7	9	8

(b)

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	2	1	4	7
2	3	1	2	5
3	4	5	7	3
4	1	8	9	7

26. Considere o problema de afectação que envolve 5 categorias diferentes de máquinas e 4 tipos de tarefas. Os custos de afectação da máquina i para a tarefa j são dados pela tabela.

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	10	2	3	9
2	5	10	15	3
3	15	5	14	15
4	20	15	13	8
5	6	5	9	4

- (a) Formule o problema em termos de programação linear.
 (b) Obtenha a solução óptima.
27. Dois jovens recém casados, César e Ana, querem dividir os trabalhos domésticos entre si de modo que ambos tenham o mesmo número de tarefas e que o tempo gasto por semana nos deveres de casa seja mantido a um mínimo. Felizmente, há um número par de tarefas, fazer compras, cozinhar, lavar a louça, lavar a roupa, limpar o chão, fazer as camas, tirar o pó e manter o carro. O tempo para os trabalhos semanais (em horas) que a Ana e o César precisam para executar estas tarefas é dado no quadro seguinte:

	Fazer Compras	Cozinhar	Lavar a louça	Lavar a roupa	Limpar o chão	Fazer as camas	Tirar o pó	Manter o carro
Ana	1	6	2	1,5	0,75	1	1	1
César	1,5	5,5	1,5	1,5	1	0,75	0,5	1,5

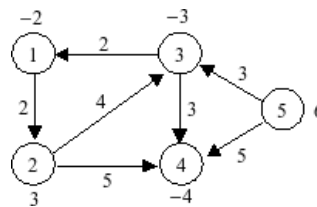
- (a) Apresente a formulação do problema.
 (b) Determine a sua solução óptima.
28. Considere o problema de afectação de n tarefas a n máquinas.
- (a) Mostre que esse problema é equivalente a um problema de fluxo de custo mínimo.
 (b) Mostre que o problema tem solução óptima.
 (c) Mostre que a característica da matriz da forma normal do problema de fluxo de custo mínimo da alínea a) é igual a $(2n - 1)$.
29. A Câmara Municipal de Coimbra deseja construir um Restaurante, um Bar e um Salão de Festas. Para isso contactou quatro empresas de construção civil que apresentaram as seguintes propostas (em unidades monetárias):

	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	Empresa 4
Restaurante	63	65	69	70
Bar	55	58	56	59
Salão de Festas	73	70	72	75

A Câmara pretende construir as três obras de modo a que o custo total seja o menor possível e por razões operacionais resolveu adjudicar no máximo uma obra a cada empresa.

- Formule o problema de adjudicação das obras às empresas como um Problema de Optimização.
- Mostre que o Problema de Optimização se reduz a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.
- Mostre que o Problema de Optimização tem solução óptima.
- Indique a escolha feita pela Câmara Municipal resolvendo o Problema de Optimização com um método à sua escolha.

30. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$:



onde o número real associado a cada nó i representa a quantidade de fluxo b_i e o número real c_{ij} associado a cada aresta representa o respectivo custo unitário.

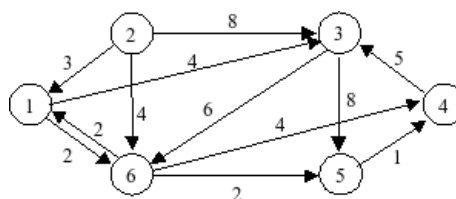
- Determine a árvore geradora de custo mínimo.
- Mostre que a árvore geradora de custo mínimo fornece uma solução básica primal não admissível e dual admissível.
- Escreva a formulação matemática do Problema Fase I sem nós adicionais associado à árvore geradora de custo mínimo e indique uma solução básica admissível para esse problema.
- Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(2, 4), (3, 1), (3, 4), (5, 3)\}, \quad L = E - J$$

fornece uma solução básica primal admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G .

- Determine a solução óptima para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo em G usando o método simplex com a solução inicial obtida em (d).

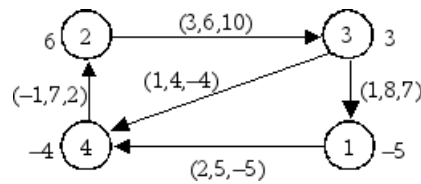
31. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$



onde o número real associado a cada aresta (i, j) representa o custo da ligação de i para j .

- Determine os Caminhos Mais Curtos do nó 2 a cada um dos restantes nós da rede, usando o algoritmo de Dijkstra.
- Mostre que o Caminho Mais Curto do nó 2 ao nó 4 é equivalente a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo e apresente esse problema.
- Determine uma árvore geradora de custo mínimo associada à solução óptima do Problema de Fluxo de Custo Mínimo referido na alínea anterior.

32. Considere o Problema de Fluxo de Custo Mínimo associado à rede $G = (V, E)$



onde em cada aresta $(i, j) \in E$ as componentes de (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}) representam os limites inferiores e superiores e o custo unitário associados e o número real associado a cada nó $i \in V$ representa a quantidade de fluxo b_i .

- Mostre que a partição de E definida por

$$J = \{(3, 1), (3, 4), (4, 2)\}, \quad L = \{(1, 4)\}, \quad U = \{(2, 3)\}$$

fornece uma solução básica admissível.

- Determine a solução óptima do problema usando o método simplex e iniciando com a solução básica apresentada na alínea (a).

33. Um fabricante de mobiliário é proprietário de três fábricas que necessitam mensalmente de 300, 250 e 150 toneladas de madeira. O fabricante pretende encomendar madeira a três empresas fornecedoras. A produção mensal de cada uma das empresas é de 100, 350 e 250 toneladas. Os custos de transporte por tonelada entre as empresas fornecedoras e as fábricas são dados na seguinte tabela:

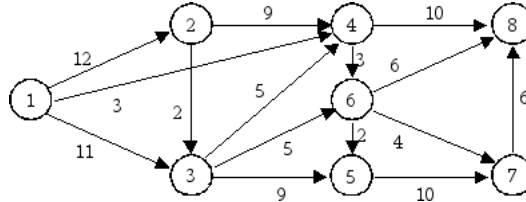
Empresas fornecedoras	Fábricas		
	1	2	3
1	10	6	5
2	1	7	8
3	2	3	3

O fabricante pretende fazer a sua encomenda de modo a reduzir ao máximo o custo total de transporte.

- Formule o problema do fabricante como um Problema de Optimização.
- Mostre que o Problema de Optimização tem solução óptima.
- Determine a árvore geradora de custo mínimo do grafo associado ao Problema de Optimização.

- (d) Mostre que a árvore geradora de custo mínimo fornece uma solução básica não admissível para o Problema de Optimização e apresente o Problema M-grande associado a essa solução básica.
- (e) Indique a encomenda do fabricante, resolvendo o Problema de Optimização por um algoritmo à sua escolha.

34. Considere a seguinte rede $G = (V, E)$:



onde o número real em cada aresta (i, j) representa a capacidade u_{ij} .

- (a) Mostre que o Problema de Fluxo Máximo do nó 1 ao nó 8 é equivalente a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.
- (b) Determine o Fluxo Máximo do nó 1 ao nó 8 usando um algoritmo à sua escolha.
- (c) Mostre que o fluxo válido óptimo do Problema de Fluxo Máximo fornece uma solução básica admissível para o Problema de Fluxo de Custo Mínimo equivalente e indique os conjuntos das variáveis básicas e não básicas dessa solução.
35. Considere o Problema da Mochila

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} && \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ &\text{Sujeito a} && \sum_{j=1}^n p_j x_j \leq M \\ &&& x_j \geq 0 \text{ e inteiros, } j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

onde $c_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $M, p_j, j = 1, 2, \dots, n$, são inteiros positivos tais que $p_j < M$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

- (a) Mostre que o Problema da Mochila é equivalente a um Problema de Fluxo de Custo Mínimo numa rede com $(M + 1)$ nós.
- (b) Discuta dois processos para determinar a solução óptima do Problema da Mochila baseados nas técnicas de Optimização em Redes.
36. Seja $G = (V, E)$ uma rede, com $V = \{1, 2, \dots, m\}$.

- (a) Considere o Caminho Simples C :

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow m$$

e seja

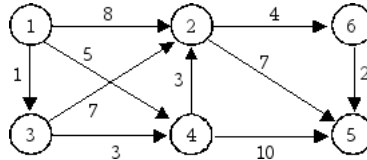
$$J = \{(i, i + 1), i = 1, 2, \dots, m - 1\}$$

Mostre que se $G' = (V, J)$ é uma árvore geradora de custo mínimo satisfazendo

$$c_{ij} - \sum_{k=i+1}^j c_{ik} \geq 0$$

para todos $(i, j) \in J$ tais que $i < j$, então C é o caminho mais curto entre os nós 1 e m .

(b) Considere a seguinte rede



onde o número real associado a cada aresta (i, j) representa o custo da ligação de i para j . Determine o caminho mais curto entre os nós 1 e 5 usando dois processos diferentes.

37. Considere o Problema Multicomodidade de Fluxo de Custo Mínimo com 2 mercadorias, onde para cada aresta (i, j) e mercadoria k a função custo tem a forma

$$f_{ijk}(x_{ijk}) = x_{ijk} + kx_{ijk}^2$$

(a) Apresente a formulação do problema.

(b) Descreva o algoritmo de Frank-Wolfe para a determinação do mínimo global do Programa Não Linear apresentado na alínea anterior, dando especial atenção ao processo de determinação da direcção de pesquisa.

38. Considere o Problema de Fluxo de Custo Mínimo Não Linear com Restrições Laterais na rede $G = (V, E)$:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && \sum_{(i,j) \in E} f_{ij}(x_{ij}) \\ &\text{Sujeito a} && \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &&& \sum_{j:(i,j) \in E} jx_{ij} \leq b_{m+i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &&& l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

onde $V = \{1, 2, \dots, m\}$, $b_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \dots, 2m$, com $\sum_{i=1}^m b_i = 0$, $l_{ij}, u_{ij} \in \mathbb{R}^1$, com $l_{ij} < u_{ij}$, e f_{ij} são funções convexas e continuamente diferenciáveis em \mathbb{R}^1 . Descreva o algoritmo de Frank-Wolfe para a determinação de um mínimo global do programa, dando particular atenção ao processo de determinação da direcção de pesquisa.

39. Um historiador a viver em Coimbra foi convidado a realizar três conferências durante cada um dos três dias de um fim-de-semana alargado (sexta-feira, sábado e domingo). Cada conferência terá lugar numa das cidades de Coimbra, Porto, Braga, Lisboa e Évora, recebendo para o efeito um subsídio de 400, 450, 440, 500 e 550 Euros respectivamente. A conferência de Braga não poderá ocorrer no sábado e o historiador tem de estar em Lisboa na segunda-feira a seguir ao fim de semana.

As deslocações serão suportadas pelo historiador e constam da seguinte tabela em Euros:

	Coimbra	Porto	Braga	Lisboa	Évora
Coimbra	0	50	80	70	100
Porto	50	0	30	120	150
Braga	80	30	0	150	180
Lisboa	70	120	150	0	30
Évora	100	150	180	30	0

Pretende-se saber as conferências e respectivos locais que o historiador deve realizar de modo a maximizar o seu lucro.

- (a) Apresente a formulação do problema.
 - (b) Discuta dois processos para a determinação de um limite inferior para o valor óptimo do problema baseados nas técnicas de optimização em redes.
40. Considere o problema da determinação das rotas de p ($p \geq 1$) caixeiros viajantes que partindo da mesma cidade A_1 visitam algumas das cidades A_2, A_3, \dots, A_n e voltam à cidade de partida, de acordo com as seguintes condições:
- Quaisquer duas cidades i e j estão ligadas entre si e a uma distância $d_{ij} > 0$.
 - Cada cidade é visitada por um e um só caixeiro.
 - Cada caixeiro só pode visitar uma vez cada cidade.
- (a) Apresente a formulação do problema.
 - (b) Discuta dois processos para a determinação de um limite inferior para o valor óptimo do problema baseados nas técnicas de optimização em redes.
41. Um consórcio planeia a construção de uma central hidroeléctrica. Os trabalhos que se têm de executar são os seguintes:
- (a) construção das ruas de acesso ao local;
 - (b) terraplanagens;
 - (c) construção de uma aldeia para alojar os trabalhadores;
 - (d) encomendar o material eléctrico e hidráulico;
 - (e) construção da central;
 - (f) construção da barragem;
 - (g) construção das galerias e das condutas;
 - (h) montagem das máquinas;
 - (i) ensaios de funcionamento.

A ordem pela qual os trabalhos devem ser executados, a interdependência entre eles, bem como a sua duração, são apresentados na seguinte tabela:

Trabalho	Duração	Trabalhos de que dependem
<i>a</i>	4 meses	-
<i>b</i>	6 meses	<i>a</i>
<i>c</i>	4 meses	-
<i>d</i>	12 meses	-
<i>e</i>	10 meses	<i>b, c</i>
<i>f</i>	24 meses	<i>b, c</i>
<i>g</i>	7 meses	<i>a</i>
<i>h</i>	10 meses	<i>d, e, g</i>
<i>i</i>	3 meses	<i>f, h</i>

Identifique as actividades críticas, o tempo mais cedo da realização (acabamento do projecto), bem como a flutuação total para cada uma das actividades.

42. Para o seguinte projecto identifique as actividades críticas, o tempo mais cedo da realização (acabamento do projecto), bem como a flutuação total para cada uma das actividades.

Trabalho	Precedência	Duração
<i>a</i>	-	5 dias
<i>b</i>	-	10 dias
<i>c</i>	-	8 dias
<i>d</i>	<i>a</i>	6 dias
<i>e</i>	<i>a</i>	12 dias
<i>f</i>	<i>b, d</i>	7 dias
<i>g</i>	<i>c</i>	4 dias
<i>h</i>	<i>e, f, g</i>	6 dias
<i>i</i>	<i>c</i>	10 dias

Referências

- [Ahuja et al., 1993] Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., and Orlin, J. B. (1993). Network Flows : Theory, Algorithms and Applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [Bazaraa et al., 1990] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. F. (1990). Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, New York.
- [Bradley et al., 1977] Bradley, S., Hax, A., and Magnanti, T. L. (1977). Applied Mathematical Programming. Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- [Chvátal, 1983] Chvátal, V. (1983). Linear Programming. W.H. Freeman & Company, New York.
- [Gill et al., 1991] Gill, P., Murray, E., and Wright, M. (1991). Numerical Linear Algebra and Optimization, volume 1. Addison-Wesley, Reading.
- [Hillier and Lieberman, 1989] Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (1989). Introduction to Operations Research. McGraw-Hill, New York.
- [Júdice et al., 2006] Júdice, J., Martins, P., Pascoal, M., and Santos, J. (2006). Programação Linear. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra.

[Murty, 1995] Murty, K. G. (1995). Linear Programming. Prentice Hall, New York.

[Nash and Sofer, 1996] Nash, S. G. and Sofer, A. (1996). Linear and Nonlinear Programming. McGraw-Hill, New York.

[Ramalhete et al., 1998] Ramalhete, M., Guerreiro, J., and Magalhães, A. (1998). Programação Linear. McGraw-Hill, Lisboa.

[Tavares et al., 1996] Tavares, L. V., Oliveira, R., Themido, J. H., and Correia, F. N. (1996). Investigação Operacional. McGraw-Hill, Lisboa.