

Análise Comparativa dos Modelos de Selecção de Carteiras de Acções de Markowitz e Konno

Joaquim João Júdice[§]

Celma O. Ribeiro^{*†}

Jorge P. J. Santos[‡]

[§] Departamento de Matemática – Universidade de Coimbra
Joaquim.Judice@co.it.pt

[†] Departamento de Engenharia de Produção – Escola Politécnica da Universidade de S. Paulo
celma@usp.br

[‡] Departamento de Matemática – Escola Superior de Tecnologia de Viseu – IPV
jsantos@mat.estv.ipv.pt

Abstract

In this paper Konno portfolio selection model is presented and compared with Markowitz classical model. The computational effort for finding an optimal portfolio by both models is investigated and the quality of the corresponding portfolios is analyzed. The use of these two models in real-life capital markets is finally discussed.

Resumo

Neste artigo é discutido um modelo desenvolvido por Konno para a selecção de carteiras de activos financeiros e o seu desempenho é comparado com o do modelo clássico de Markowitz. Para além de analisar a velocidade de obtenção de respostas, procura-se avaliar qualitativamente as soluções obtidas e discute-se a efectiva aplicação dos modelos dentro das práticas comuns ao mercado de capitais.

Keywords: Portfolio Selection Models, Risk Analysis, Linear Programming, Quadratic Programming

Title: A comparative analysis of the Markowitz and Konno portfolio selection models

* Financiada pela FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Processo nº 00/11044-9

1. Introdução

O mercado financeiro nacional e internacional passou, nas últimas décadas, a utilizar técnicas relativamente sofisticadas como ferramenta de apoio à tomada de decisão. Não se trata apenas de utilizar novas técnicas para adquirir diferencial competitivo mas sim de assegurar a própria sobrevivência num cenário globalizado. A disseminação do uso de modelos matemáticos em mercados financeiros, nomeadamente de estatística e investigação operacional, deve-se essencialmente a dois factores. O primeiro foi a inovação e o amadurecimento destes mercados, que se deu através do desenvolvimento e uso de novos produtos financeiros, dando origem a uma maior necessidade de protecção contra riscos de diferentes naturezas. O outro factor foi a redução dos custos de recursos computacionais que permite obter respostas rápidas e eficazes a perguntas importantes como qual o grau de exposição ao risco de uma determinada instituição financeira ou qual a melhor composição da carteira de investimentos.

O trabalho de Henry Markowitz [10] sobre a relação entre risco e retorno foi, sem dúvida, um marco na história das finanças moderna. O seu contributo fundamental foi a distinção entre a variabilidade do retorno de um activo financeiro e o seu impacto no risco de uma carteira de investimentos. Segundo Dimson e Mussavian [2], o trabalho de Markowitz possibilita que, desde que se disponha de um conjunto de dados e de capacidade computacional, se encontrem carteiras que forneçam o menor nível de risco para um pré-especificado nível de retorno do investimento. Analisado sob o ponto de vista de modelação matemática, o trabalho de Markowitz consiste num problema de investigação operacional, mais precisamente um problema de optimização quadrática [14], para o qual existe hoje software disponível no mercado. Dentro desta óptica uma questão importante está relacionada com a velocidade de obtenção de respostas. Embora o modelo de composição de carteiras de Markowitz seja potencialmente rápido, será possível encontrar variantes deste modelo que forneçam soluções igualmente robustas num tempo computacionalmente inferior? Uma resposta afirmativa a esta questão é importante e

complexa quer no ponto de vista do investigador quer do investidor. Rapidez pode ser sinónimo de ganho, porém, o custo a ser pago pelo acréscimo de velocidade não poderá ser negligenciado, seja este custo financeiro ou uma simplificação do modelo que eventualmente reduza sua aplicação a problemas práticos.

Neste contexto pretende-se, com este trabalho, apresentar o modelo para selecção de carteiras de activos financeiros desenvolvido por Konno [7], e compará-lo com o modelo de Markowitz. O modelo de Konno é apontado na literatura de finanças como um importante contributo para a resolução de problemas de gestão de carteiras por introduzir uma medida de risco mais simples do que a utilizada por Markowitz. Através de uma análise de acções do mercado português e europeu, pretende-se investigar a efectiva possibilidade de emprego dos modelos a problemas reais e avaliar o seu desempenho computacional para compor carteiras de acções. Neste trabalho considerar-se-á apenas carteiras constituídas de acções, por simplicidade de apresentação, ainda que os modelos sejam aplicáveis a situações de maior abrangência que incluem activos de outra natureza como, por exemplo, obrigações e derivados [8].

2. A formalização dos modelos: algumas considerações técnicas

Um investidor que esteja a compor uma carteira de acções deve ter em mente as várias dimensões do risco, principalmente o risco de mercado, ou seja, o risco de ocorrer uma variação adversa dos preços dos activos em carteira, que conduza a uma redução do retorno do investimento. Um investidor racional pretende manter uma carteira com retorno tão grande quanto possível ao mesmo tempo que pretende tornar o risco tão pequeno quanto possível. Assim, para um fixado nível de retorno que considere aceitável, o investidor deve encontrar uma carteira que minimize o risco.

Matematicamente o risco de mercado pode ser tratado como uma variável aleatória, sendo os momentos da sua distribuição de probabilidade indicativos do maior ou menor risco a

que o activo está exposto. É relativamente simples estudar o risco de mercado de um activo sob esta óptica. No entanto para uma carteira com vários activos, a complexidade do problema de medir risco é grande devido ao facto da distribuição de probabilidade do retorno da carteira poder diferir significativamente da distribuição de probabilidade dos activos individuais [16].

Considere-se um universo de n acções. Seja R_j o retorno da acção j (variável aleatória) e x_j a quantidade, em dinheiro, a investir na acção j . O retorno esperado desta carteira é dado por

$$r(x_1, \dots, x_n) = E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] = \sum_{j=1}^n E[R_j] x_j$$

onde $E[.]$ representa o valor esperado da variável aleatória. Por outro lado o desvio padrão do retorno é

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{E \left[\left\{ \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right\}^2 \right]}$$

Markowitz utiliza o segundo momento da distribuição, a variância do retorno, como medida de risco. Do ponto de vista do modelo matemático, quando se quer encontrar uma carteira de risco mínimo, analisar a variância ou a sua raiz quadrada, o desvio padrão (denominado volatilidade), levará ao mesmo portfolio. Deseja-se obter uma carteira de risco mínimo, ou seja, de variância mínima sujeito a restrições de uso do capital e de limite mínimo de retorno na carteira. Assim o modelo pode ser escrito como o seguinte problema quadrático paramétrico:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
& \text{sujeito a} && \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho M_0 \\
& && \sum_{j=1}^n x_j = M_0 \\
& && 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

onde M_0 é o capital disponível inicialmente, $r_j = E[R_j]$, $\sigma_{ij} = E[(R_i - r_i)(R_j - r_j)]$ é a covariância entre os activos i e j , ρ é um parâmetro que representa a taxa de retorno mínima requerida por um investidor e u_j é a quantidade máxima de dinheiro que pode ser investido em j .

O modelo desenvolvido por Konno [7] introduziu como medida de risco o desvio absoluto médio

$$w(x) = E \left[\left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right| \right]$$

Se os retornos seguirem uma distribuição multivariada normal, pode-se verificar que o desvio padrão é um múltiplo do desvio absoluto médio [7] e neste caso a minimização de $w(x)$ é equivalente à minimização de $\sigma(x)$. Deste modo pode-se considerar um outro problema de minimização de risco:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & w(x) = E \left[\left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right| \right] \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n E[R_j] x_j \geq \rho M_0 \\
& \sum_{j=1}^n x_j = M_0 \\
& 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{1}$$

É evidente que em problemas reais, com destaque para mercados ilíquidos como o mercado português, a hipótese de normalidade raramente se verifica e os dois problemas podem levar a composições de carteira distintas. Assim, para além de considerações sobre aspectos computacionais é importante averiguar se algum destes modelos fornece soluções mais adequadas a problemas reais.

O modelo de Markowitz possui como maior desvantagem o facto de recair num problema de optimização quadrática. Por sua vez o modelo de Konno minimiza o valor absoluto o que, devido à estrutura do problema, pode ser transformado num problema de programação linear como a seguir se mostra.

Seja r_{jt} a realização da variável aleatória R_j durante o período t ($t=1, \dots, T$) e suponhamos que o valor esperado da variável aleatória pode ser aproximado pela média aritmética desses valores. Então

$$\bar{r}_j = \hat{E}[R_j] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt} . \tag{2}$$

Deste modo $w(x)$ pode ser aproximado por

$$\hat{E} \left[\left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right| \right] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - \bar{r}_j) x_j \right| .$$

Seja ainda

$$a_{jt} = r_{jt} - \bar{r}_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T.$$

Então podemos escrever (1) como o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \right| \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n \bar{r}_j x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^n x_j = M_0 \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3}$$

Introduzindo agora as variáveis y_t a partir de

$$y_t = \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j$$

e se K é o conjunto definido pelas restrições de (3), então este último problema pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t| \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j - y_t = 0, \quad t = 1, \dots, T \\ & x \in K \end{aligned}$$

Como y_t é uma variável sem restrição de sinal, tem-se

$$\begin{aligned} y_t &= v_t - w_t \\ v_t &\geq 0, \quad w_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\ v_t \cdot w_t &= 0 \end{aligned}$$

e

$$|y_t| = v_t + w_t$$

O programa reduz-se então

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (v_t + w_t) \\
& \text{sujeito a} && \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j - v_t + w_t = 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& && x \in K \\
& && v_t \geq 0, w_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& && v_t \cdot w_t = 0, \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

Para resolver este problema complementar começa-se por resolver o programa linear relaxado que se obtém do anterior suprimindo as condições $v_t \cdot w_t = 0, \quad t = 1, \dots, T$. Se $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$ é solução óptima desse programa, então há dois casos:

(i) Se $\bar{w}_t \cdot \bar{v}_t = 0$ para todo $t = 1, 2, \dots, T$, então $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$ é solução óptima do problema dado.

(ii) Se $\bar{w}_t \cdot \bar{v}_t > 0$ para certo $t = 1, 2, \dots, T$, então seja

$$\alpha = \min\{\bar{w}_t, \bar{v}_t : \bar{w}_t \cdot \bar{v}_t > 0\}$$

Como $\bar{w}_t \geq \alpha$ e $\bar{v}_t \geq \alpha$

$$\bar{w}_t - \bar{v}_t = (\bar{w}_t - \alpha) - (\bar{v}_t - \alpha)$$

e

$$(\bar{w}_t - \alpha) + (\bar{v}_t - \alpha) = \bar{w}_t + \bar{v}_t - 2\alpha < \bar{w}_t + \bar{v}_t$$

então $(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$ não pode ser solução óptima do programa linear.

Portanto toda a solução do programa linear relaxado é solução óptima do problema dado, o que significa que podemos suprimir a restrição de complementaridade e obter assim o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{t=1}^T (v_t + w_t) \\
& \text{sujeito a} && v_t - w_t - \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j = 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& && \sum_{j=1}^n \bar{r}_j x_j \geq \rho M_0 \\
& && \sum_{j=1}^n x_j = M_0 \\
& && 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& && v_t, w_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

Note-se que para que recaísse num problema linear, foi preciso incluir T restrições no modelo. No entanto, este número adicional de restrições não depende do número n de acções que podem fazer parte da carteira. Como a complexidade da resolução de problemas de programação linear depende basicamente do número de restrições, podemos resolver um problema com um número elevado de acções em tempo real. Por outro lado o número coeficientes não nulos nas restrições do modelo de Konno é igual a $2T + 2n + n \times T$, e portanto para números bastante elevados de T obtemos um modelo linear com muitas restrições densas, e poderá acarretar algumas dificuldades na obtenção de solução em tempo real.

Estes são os dois modelos matemáticos que analisaremos neste trabalho. Nos testes efectuados o modelo linear de Konno foi resolvido pelo método de simplex, enquanto que o modelo quadrático de Markowitz foi processado por um método de pontos interiores, ambos incorporados no código comercial CPLEX versão 4.0.9 [18]. Como iremos verificar, de acordo com o modelo utilizado, as carteiras podem ter desempenhos e comportamentos distintos ao longo do tempo.

3. Análises de desempenho dos modelos

A avaliação de modelos para gestão de carteiras de investimento que será realizada contempla questões de diferentes naturezas. Procurar-se-á avaliar a *qualidade* das carteiras construídas pelos dois modelos à luz de três dimensões: velocidade na obtenção de respostas, estabilidade das soluções e retorno obtido com o uso do modelo.

Em primeiro lugar é necessário analisar o desempenho computacional dos dois modelos com o objectivo de determinar qual o melhor em termos de tempo de CPU necessário para resolver problemas de iguais características. Para tanto será avaliado o tempo gasto para determinar a carteira óptima em cada modelo.

Outro aspecto importante diz respeito à estabilidade e composição da carteira. Uma carteira de risco mínimo de mercado que não seja líquida, isto é, constituída por activos pouco negociados no mercado, pode ser inadequada para o investidor no momento em que este deseja rebalanceá-la. Outra situação indesejável ocorre, por exemplo, no caso em que a carteira é muito *pulverizada*, isto é, constituída por um número elevado de acções diferentes. Por outro lado uma estratégia bem sucedida de investimento deverá ser possivelmente aquela que mantiver uma carteira relativamente estável, ou seja, cuja composição assegure um retorno mínimo com baixo nível de risco e não precise de ser alterada com muita frequência. Estas duas questões, liquidez e estabilidade, são relevantes quando se considera os custos operacionais e custos de transação que ocorrem na prática da gestão de carteiras.

Uma terceira questão importante refere-se ao retorno da carteira ao longo do tempo. É razoável supor que uma carteira não deva necessitar de contínuas alterações na sua composição face aos custos de rebalanceamento. Porém a gestão de investimentos é dinâmica e consequentemente exige uma avaliação permanente do desempenho da carteira. Portanto, pode-se considerar que o melhor modelo será aquele que, numa óptica de gestão dinâmica, fornece melhor retorno no final de um horizonte de tempo relativamente longo.

O universo de activos analisado consiste em 92 acções europeias, das quais 27 são portuguesas e 65 internacionais, e os dados utilizados foram recolhidos do dia 2 de Fevereiro de 1998 ao dia 23 de Fevereiro de 2000. Para efeito dos cálculos das estimativas das médias e covariâncias que constituem os parâmetros dos modelos utilizou-se o retorno logarítmico que é calculado a partir do preço de fecho dos activos em questão. Assim

$$r_{jt} = \ln \left(\frac{P_{jt}}{P_{j(t-1)}} \right) \quad (4)$$

com P_{jt} o preço de fecho da acção j na data t . Para o modelo de Markowitz utilizou-se, para além do estimador de média (2), o estimador de covariância:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{E}[(R_i - r_i)(R_j - r_j)] = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \quad (5)$$

onde, como anteriormente, os valores observados dos retornos r_{jt} são dados por (4).

Um outro parâmetro fundamental nos dois modelos é o horizonte de tempo representado pela constante T . Para analisar o resultado dos modelos variou-se o número de observações entre 25 e 300 dias. No caso do modelo de Markowitz esta constante determinou o número de observações empregue para calcular as estimativas de média e covariância (2) e (5), enquanto que para o modelo de Konno esta constante determinou o número de restrições do modelo.

Admitiu-se que o valor da carteira deveria ser de 1.000.000 Euros (ou seja $M_0 = 1.000.000$), não havendo qualquer restrição no montante a investir em cada acção. Quanto ao retorno mínimo exigido, assumiu-se que era necessário garantir que este estivesse acima de um valor ρ_0 . Esta constante foi escolhida como sendo a média do retorno das várias acções consideradas. Também foram realizadas experiências para modelos em que se exigia um retorno mínimo acima de $(\rho_0 + 0,001)$ e $(\rho_0 + 0,002)$.

3.1 O tempo computacional

Para avaliar o desempenho dos modelos em tempo real é necessário investigar qual deles é mais rápido em termos de tempo de CPU gasto para resolução de problemas similares. Para cada valor de T considerado, ou seja, para horizontes de 25, 50, 100, 200 e 300 dias, os dois modelos foram executados diversas vezes e os resultados são apresentados na tabela 1.

Na primeira coluna dessa tabela apresenta-se o número de acções disponíveis para a composição da carteira. A quarta coluna inclui o número de janelas de tempo que foram testadas, associadas a horizontes de tempo de tamanho fixo T . A quinta e sexta colunas apresentam os tempos médios, em segundos de CPU, para o número de testes indicado na quarta coluna da tabela.

É de notar que o tempo gasto no modelo de Konno depende fortemente do número de observações consideradas mas não sofre alterações significativas em função do número de acções que podem vir a constituir a carteira. Por sua vez o desempenho do modelo de Markowitz depende do número de acções que irão compor a carteira. Esta relação pode ser explorada de acordo com o perfil do investidor. Assim se se pretende analisar um universo de acções limitado deve-se possivelmente optar pelo modelo de Markowitz. Por outro lado, o emprego destes modelos para problemas com muitos activos (o que é importante do ponto de vista de aplicações reais nas quais se incluem diferentes activos) fica comprometido no caso de Markowitz, sendo mais apropriado o uso do modelo de Konno.

Nº de acções	Horizonte T	Rendimento mínimo	Nº de testes	Tempo Médio (em segundos)	
				Modelo de Markowitz	Modelo de Konno
27	25	$\rho_0 + 0,000$	489	0.03	0.02
27	50	$\rho_0 + 0,000$	464	0.03	0.02
27	100	$\rho_0 + 0,000$	414	0.03	0.06
27	200	$\rho_0 + 0,000$	314	0.03	0.16
27	300	$\rho_0 + 0,000$	214	0.03	0.30
27	25	$\rho_0 + 0,001$	489	0.03	0.02
27	50	$\rho_0 + 0,001$	464	0.03	0.02
27	100	$\rho_0 + 0,001$	414	0.03	0.05
27	200	$\rho_0 + 0,001$	314	0.03	0.13
27	300	$\rho_0 + 0,001$	214	0.03	0.24
27	25	$\rho_0 + 0,002$	489	0.03	0.02
27	50	$\rho_0 + 0,002$	464	0.03	0.02
27	100	$\rho_0 + 0,002$	392	0.03	0.05
27	200	$\rho_0 + 0,002$	235	0.03	0.10
27	300	$\rho_0 + 0,002$	110	0.03	0.18
92	25	$\rho_0 + 0,000$	476	0.12	0.03
92	50	$\rho_0 + 0,000$	451	0.23	0.07
92	100	$\rho_0 + 0,000$	401	0.33	0.20
92	200	$\rho_0 + 0,000$	301	0.33	0.56
92	300	$\rho_0 + 0,000$	201	0.33	1.21
92	25	$\rho_0 + 0,001$	476	0.12	0.03
92	50	$\rho_0 + 0,001$	451	0.23	0.07
92	100	$\rho_0 + 0,001$	401	0.35	0.18
92	200	$\rho_0 + 0,001$	301	0.35	0.43
92	300	$\rho_0 + 0,001$	201	0.36	0.82
92	25	$\rho_0 + 0,002$	476	0.12	0.03
92	50	$\rho_0 + 0,002$	451	0.24	0.06
92	100	$\rho_0 + 0,002$	401	0.37	0.14
92	200	$\rho_0 + 0,002$	301	0.38	0.28
92	300	$\rho_0 + 0,002$	201	0.39	0.48

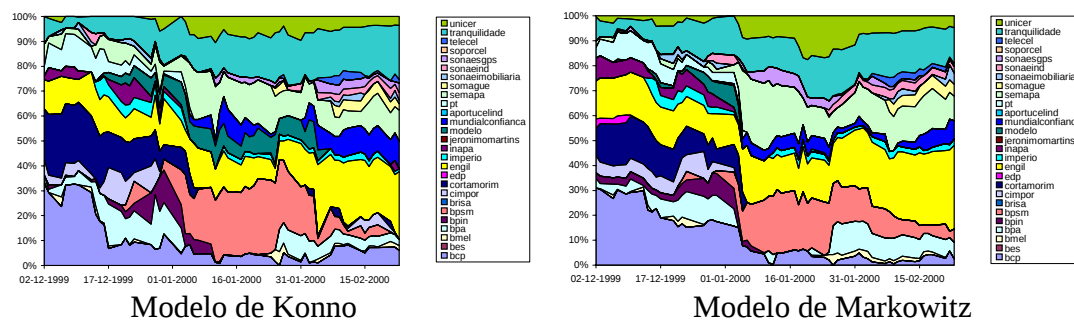
Tabela 1

3.2 Estabilidade da solução

A questão da estabilidade e estrutura das carteiras construídas pelos modelos foi tratada qualitativamente. Os gráficos apresentados na figura 1 indicam a composição das carteiras ao longo do tempo. O eixo horizontal corresponde às datas em que foram construídas as

carteiras e o vertical às participações dos activos na carteira. Estes gráficos dão uma boa indicação da composição das carteiras ao longo do período de tempo considerado, permitindo assim aferir das suas estabilidades.

$T = 50$:



$T = 300$:

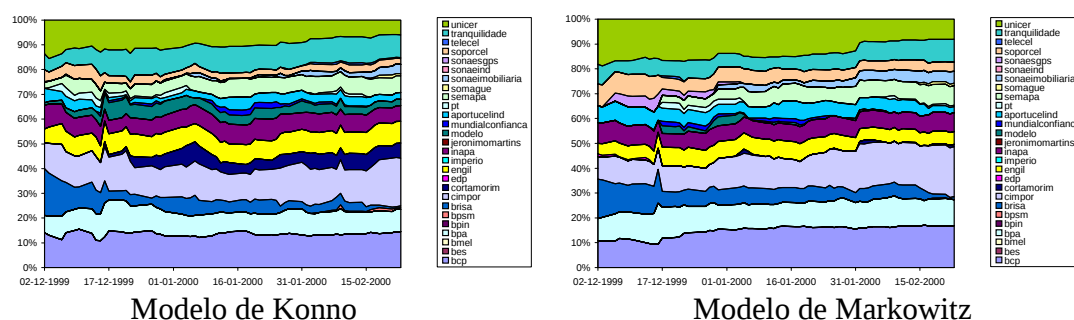


Figura 1

Analisaram-se as 27 acções do mercado português e considerou-se ($\rho_0 + 0,000$) como limite mínimo do retorno a média do retorno dos activos que podem fazer parte da carteira. Pode-se observar que quanto maior for o valor de T mais estável será a carteira, o que é razoável por em horizontes mais longos os efeitos das variações de curto prazo causarem menor impacto na carteira. É de notar que os modelos foram testados todos os dias e que os estimadores usados no cálculo dos seus parâmetros dependem dos rendimentos diários das acções consideradas nos últimos T dias. Deste modo, quando passamos do teste de um dos modelos num determinado dia para o dia seguinte, existe uma deslocação da janela temporal T de um dia e os estimadores usados dependem de apenas um dia diferente. Por

isso, quanto maior for o valor de T , menor será o peso desse dia no cálculo dos estimadores e maior será a tendência para que a carteira tenha uma composição semelhante ao dia anterior.

Uma pergunta natural é a de saber qual o impacto causado pelo aumento do retorno mínimo adoptado pelo investidor. Esperava-se que ao exigir um maior retorno houvesse uma redução da estabilidade da composição das carteiras. No entanto esse facto não ficou evidente nos testes realizados, conforme ilustram as figuras 2 e 3.

3.3 Os modelos ao longo do tempo

As decisões no mercado de capitais não são estáticas e por isto é importante estudar o que ocorre quando se emprega um modelo para tomar decisões no decorrer do tempo. É uma prática usual nas instituições financeiras analisar as carteiras diariamente e apenas alterar a sua composição se houver uma excessiva exposição ao risco. É um padrão adoptar-se para tal o *Valor em Risco* da carteira ($V@R$), definido como a maior perda que pode incorrer a um nível de confiança pré-definido. A composição da carteira é modificada caso possua um $V@R$ muito elevado. Nesse ponto de vista pode-se considerar o melhor modelo como aquele que, ao ser utilizado regularmente para rebalancear a carteira, fornece o maior retorno no final de um período de tempo relativamente longo.

Uma discussão mais aprofundada sobre a metodologia para o cálculo do $V@R$ está fora do âmbito deste trabalho e há uma extensa literatura a este respeito [6,9,16,19]. Será adoptada a metodologia baseada em dados históricos. Calcula-se diariamente a estimativa de variância da carteira através de

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \hat{\sigma}_{ij} x_i x_j$$

Modelo de Markowitz com $T = 200$:

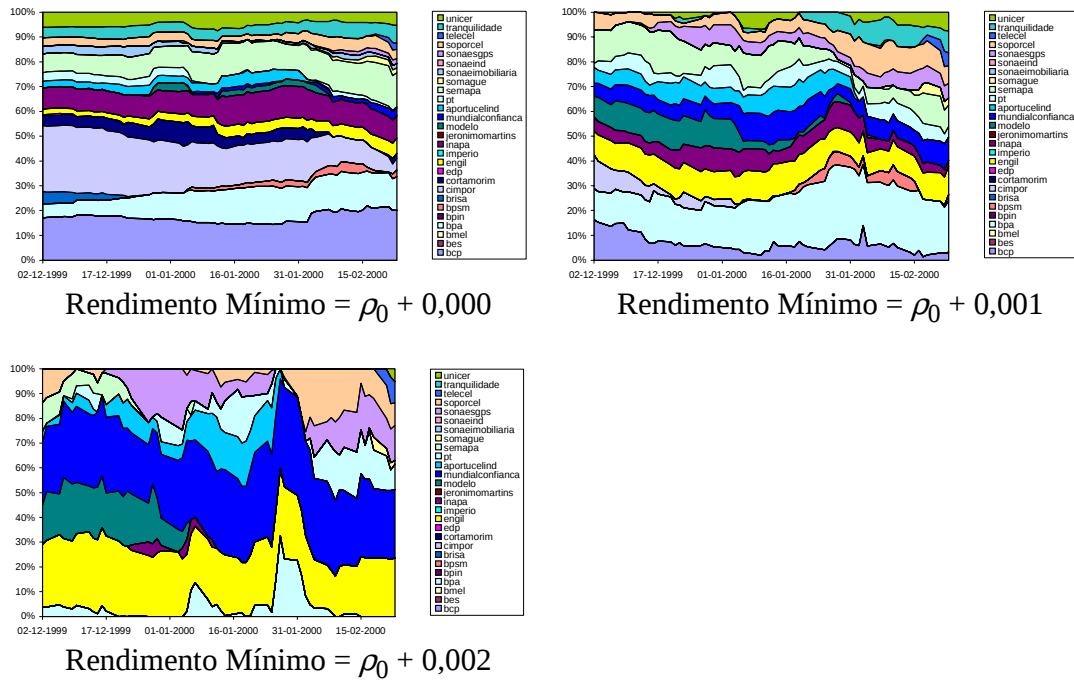


Figura 2

Modelo de Konno com $T = 200$:

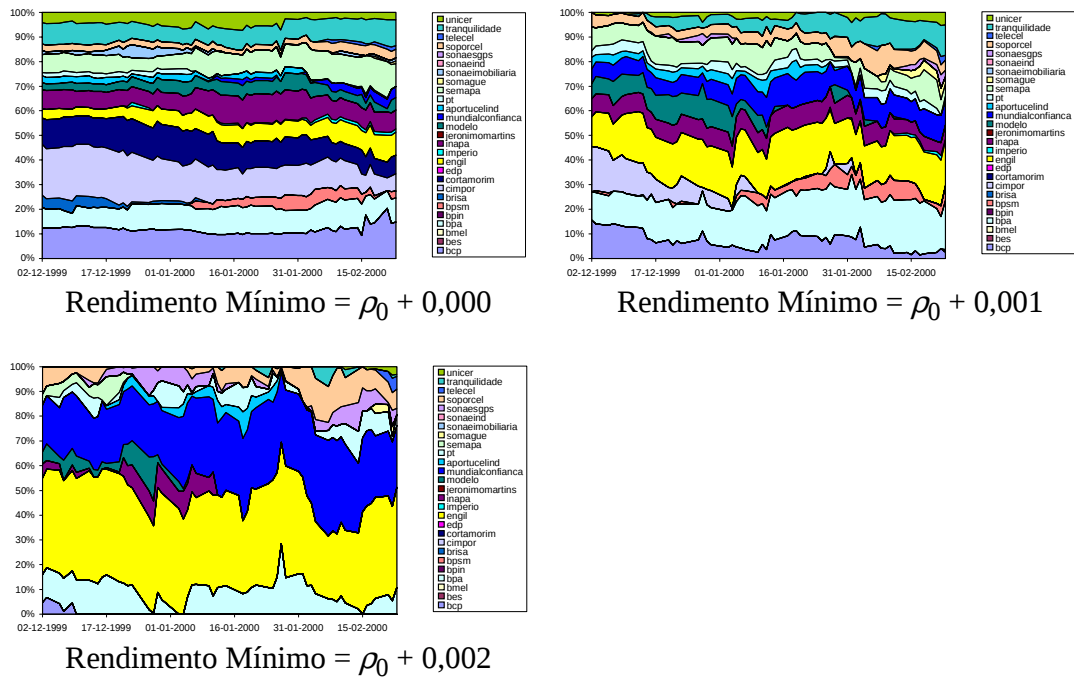


Figura 3

onde a matriz de covariâncias é estimada por (6). Para além disso é preciso escolher um nível de confiança e neste estudo será utilizado $\alpha = 95\%$. Como se está a trabalhar com acções, o cálculo do valor em risco é feito através de

$$V@R = \sqrt{\nabla^T \Sigma \nabla}$$

onde Σ é a matriz de correlação cujos elementos ρ_{ij} são estimados a partir de

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{\sigma_{jj}}}$$

e

$$\nabla = 1.65 \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \vdots \\ \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

A metodologia empregue para comparar os dois modelos consistiu em calcular diariamente o V@R da carteira que se tinha em mãos. Se o V@R excedia um limite pré-fixado de 15.300 Euros, empregava-se o modelo (Markowitz ou Konno) para efectuar o rebalanceamento da carteira. Este procedimento repetiu-se por um período de 214 dias, de 24 de Maio de 1999 até 23 de Fevereiro de 2000. Nesta metodologia partimos de uma carteira com o valor de 1.000.000 Euros e nos dias seguintes este valor foi actualizado em função das cotações dos activos e do rebalanceamento do portfolio. O horizonte adoptado para realizar os cálculos foi $T = 300$. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 2 e indicam que o modelo de Markowitz conduziu à constituição de uma carteira com um valor monetário mais elevado. Por outro lado, o número de rebalanceamentos que ocorreram com este modelo foi maior, sendo por isso superiores os custos de transacção associados.

Valor da carteira em 23 de Fevereiro de 2000		Nº de rebalanceamentos	
Markowitz	Konno	Markowitz	Konno
1.127.596,80 Euros	1.071.014,72 Euros	165 dias	139 dias

Tabela 2

4. Conclusões

O problema de gestão de carteiras de investimentos tem atraído o interesse tanto de profissionais ligados à investigação quanto de profissionais que actuam no dia a dia das instituições financeiras. A disponibilidade de recursos computacionais, que facilitou o uso de modelos para composição de carteiras, estabeleceu novos paradigmas no que diz respeito às metodologias de apoio à tomada de decisão. É necessário identificar, dentro da vasta quantidade de modelos disponíveis na literatura, qual o mais adequado a um cenário económico particular ou a um perfil específico de investidor. Neste contexto este trabalho procurou investigar quais as vantagens e desvantagens dos modelos de Markowitz e Konno para selecção de carteiras de acções.

Como já se poderia prever, não há um modelo cujo desempenho seja superior ao outro em todas as dimensões consideradas. O modelo de Markowitz apresentou, para o conjunto de dados analisado, um retorno superior ao modelo de Konno. Porém para tanto foi necessário realizar uma maior quantidade de alterações no portfolio o que directa ou indirectamente incorre em custos de operação não considerados explicitamente neste artigo. Assim, o preço a ser pago pelo retorno adicional obtido no modelo de Markowitz é o maior número de rebalanceamentos no portfolio. Os dois modelos exibiram um comportamento similar em termos da estrutura das carteiras. Tanto o modelo de Konno quanto o de Markowitz constroem carteiras que não sofrem alterações significativas quando o horizonte temporal de análise é longo, ou seja, se a série empregue possui muitos dados. Um horizonte temporal reduzido conduz a uma carteira mais susceptível a impactos de curto prazo do mercado e, sob este aspecto, nenhum dos dois modelos pode ser considerado superior ao outro. Quanto ao tempo computacional, o desempenho do modelo de Markowitz depende do número de acções analisadas enquanto que o modelo de Konno tem sua eficiência dependente da maior quantidade de dados considerados.

Este trabalho constitui um primeiro estudo de dois importantes modelos de portfolio. Dentro dos diversos estudos complementares que podem ser realizados destaca-se um aumento do horizonte temporal que possibilite incluir situações adversas no mercado, tais como os eventos de 11 de Setembro de 2001. Outros activos poderiam ser incluídos na carteira e seria razoável analisar o comportamento dos dois modelos para diferentes mercados. Além disso há inúmeras variantes destes modelos que incluem a presença de custos de transacção, considerações a respeito de cenários económicos e análises multiperíodo. Estes serão possivelmente objecto de estudos posteriores.

5. Referências

- [1] M. S. Bazaraa, H. Sherali, C. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [2] E. Dimson, M. Mussavian, *Three Centuries of Asset Pricing*, Journal of Banking and Finance 23 (1999) 1745-1769.
- [3] E. J. Elton, M. J. Gruber, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [4] C. D. Feinstein, M. N. Thapa, *A Reformulation of a Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model*, Management Science 39 (1993) 1552 - 1553.
- [5] R. A. Johnson, Dean W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [6] P. Jorion, *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw Hill, New York, 2000.
- [7] H. Konno, H. Yamazaki, *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market*, Management Science 37 (1991) 519 - 531.
- [8] H. Konno, K. Kobayashi, *An Integrated Stock-Bond Portfolio Optimization Model*, Journal of Economic Dynamics and Control, 21 (1997) 1427-1444.

- [9] N. Larsen, H. Mausser, S. Uryasev, *Algorithms for Optimization of Value-at-Risk*. Research Report 2001-9, ISE Dept., University of Florida, 2001.
- [10] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [11] K. Murty, *Linear Programming*, John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [12] R. T. Rockafellar, S. Uryasev, *Optimization of Conditional Value-At-Risk*, Journal of Risk, 2 (2000) 21-41.
- [13] H. Salkin e K. Mathur, *Foundations of Integer Programming*, North Holland, 1989.
- [14] W. Sharpe, *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw Hill, New York, 1970.
- [15] M.C. Steinbach, *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*, SIAM Review, 43 (2001) 31-85.
- [16] L. Tibiletti, *Incremental VaR and Var with Background Risk: Traps and Misinterpretations*, Proceedings of the 27th Seminar of the European Group of Risk and Insurance Economists, Rome, Italy, 2000, pag. 18-20.
- [17] S. J. Wright, *Primal-Dual Interior Point Methods*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [18] Manual do Utilizador do CPLEX, CPLEX Optimization Inc, 1995.
- [19] RiskMetrics – Technical Document, 4-th Edition, J. P. Morgan, 1996.