Joaquim João Júdice

Texto de Apoio às Aulas de Análise Matemática I

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
2010

I - Conceitos e Resultados

1 Funções Reais de Uma Variável Real

- Função, Domínio e Contradomínio
- Composição de Funções
- Função Injectiva / Função Inversa
- Funções monótonas (crescentes e decrescentes)
- Gráfico de uma Função
- Funções elementares: Linear, Potência, Raíz, Módulo, Exponencial ($a > 1$ e $0 < a < 1$), Logaritmo ($a > 1$ e $0 < a < 1$), Circulares Directas e Inversas, Hiperbólicas Directas e Inversas

Gráficos e Propriedades $\Longrightarrow$ **Tabelas**

- Equações

2 Limites e Continuidade das Funções Reais de uma Variável Real

- Definições de Limites (θ, δ): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \rho$ / $a = -\infty$, a^-, a, a^+, $+\infty$, $\rho = -\infty$, ρ^-, ρ, ρ^+, $+\infty$ / e interpretação geométrica
- Propriedades dos Limites
- Definição de Função Contínua em a, A / Continuidade Lateral
- Operações com Funções Contínuas (Adição, Multiplicação, Divisão, Composição)
- Interpretação Geométrica de Função Contínua em Intervalo (Curva Contínua)
- Continuidade das Funções Elementares nos Domínios (*todas são contínuas*) **(Tabelas:Gráficos)**
- Regras de Cálculo dos Limites **(Tabela)**
- Limites das Funções Elementares

3 Derivadas, Primitivas e Integrais das Funções Reais de uma Variável Real

- Definição da Derivada $f'(a)$ de f num ponto $a \in D_f$ / Derivadas laterais $f'_d(a)$, $f'_e(a)$
- Funções Deriváveis e Diferenciáveis em pontos / intervalos
- Funções Regulares em Intervalos
- Funções Continuamente Diferenciáveis em pontos / intervalos
- Derivadas de ordens superiores
- Interpretação geométrica da derivada de uma função contínua em a (Recta tangente, não vertical / vertical). Derivadas > 0, $= 0$, < 0, $-\infty$, $+\infty$
- Regras de Cálculo das Derivadas das funções diferenciáveis (Adição, Multiplicação, Divisão, Composição, Função Inversa) **(Tabela)**
- Derivadas das funções elementares **(Tabela)**. São diferenciáveis nos seus domínios, com as seguintes excepções:
  - A função módulo não é derivável em $x = 0$
  - Derivadas Infinitas:

    função arcsin: -1, 1;
    função arccos: -1, 1;
    função argch: 1;
    função raíz: 0.
- Primitiva de uma Função Contínua num Intervalo
- Propriedades e Regras de Cálculo das Primitivas **(Tabela)**
- Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem: Variáveis Separadas e Lineares
- Propriedades das Funções Regulares em Intervalos
- Aproximações Linear e Quadrática de uma Função
- Indeterminações
- Máximos e Mínimos Locais e Globais
- Funções Convexas e Côncavas
- Integral de Riemann
- Integral (definido) de uma Função Contínua num Intervalo Fechado
- Cálculo e Propriedades do Integral Definido
- Interpretação Geométrica do Integral Definido: Áreas de Regiões Planas

- Funções com integrais
- Integrais impróprios de 1ª espécie
- Integrais impróprios de 2ª espécie
- Critérios de convergência dos integrais impróprios

4 Teoremas Fundamentais

- **Enquadramento:** Seja $a = -\infty$, a^-, a, a^+ ou $+\infty$, com $a \in \mathbb{R}$ e I um intervalo contendo a ou com um extremo em a. Se

$$\forall_{x\in I}\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell$$

onde $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- **Valores Intermédios:** Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $y \in \mathbb{R}$ é um número compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = y$.
- **Weierstrass:** Se f é contínua em $[a, b]$, então f tem um mínimo e um máximo global nesse intervalo.
- **Rolle:** Se f é regular em $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.
- **Lagrange (valor médio):** Se f é regular em $[a, b]$ então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.
- **Taylor (de ordem $n \in \mathbb{N}$):** Se $f^{(n)}$ é regular em $[a, b]$ então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

- **Cauchy:** Se f, g são regulares em $[a, b]$, $g(a) \neq g(b)$ e $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, então

$$\exists_{c\in]a,b[} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- **Regra de L'Hopital $\frac{0}{0}$:** Se f, g são diferenciáveis em $I =]a - \delta, a + \delta[$ (com possível excepção de a), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I - \{a\}$ e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ \ (\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$$

- **Teorema da Média:** Se f é contínua em $[a,b]$, então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Nota: Teorema também é válido se $a > b$.

5 Outros Resultados Importantes

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

2. $\forall_{x\in I} f(x) \geq (>) 0$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$

   com I um intervalo e $a \in I$ ou um ponto extremo de I

3. $\forall_{x\in I}\ g(x) \geq f(x) (\leq)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty(-\infty)$

   com I um intervalo e $a \in I$ ou um ponto extremo de I

4. f é diferenciável em x_0 $(A) \Longrightarrow f$ é contínua em x_0 (A)

   Nota: Não é válido se f é apenas derivável em x_0. Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \text{arc tg}\frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   f não é contínua em $x = 0$ e f é derivável em $x = 0$, pois

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{arc tg}\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x - 0} = +\infty$$

5. f é contínua em a e $f(a) > y (< y) \Longrightarrow \exists_{\theta>0} \forall_{x\in]a-\theta,a+\theta[} f(x) > y (< y)$

6. f é contínua em $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0 \Longrightarrow \exists_{c\in]a,b[} f(c) = 0$

7. f contínua e injectiva em intervalo $I \Longrightarrow f$ é crescente ou decrescente em I.

8. f contínua e injectiva em intervalo $I \Longrightarrow f^{-1}$ é crescente ou decrescente e contínua em I.

9. f é monótona em $]a,b[\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existem (laterais se $a, b \in \mathbb{R}$).

10. Se f é contínua num intervalo I, então tem uma primitiva nesse intervalo.

11. Se f e g são contínuas num intervalo I, então

    - Expressão Geral das Primitivas de f em I:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

      com C constante e F uma primitiva de f em I.

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\forall \lambda \neq 0 : \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.
- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
- $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx + C$, com $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- $\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$, com $\varphi : t \longrightarrow x = \varphi(t)$ continuamente derivável e injectiva num intervalo I.

12. Se f é regular em $[a, b]$ então

$$f \text{ é crescente (decrescente) em } [a,b] \Longrightarrow \forall_{x\in]a,b[} f'(x) \geq 0 (\leq 0)$$

$$\forall_{x\in]a,b[} f'(x) > 0 (< 0) \Longrightarrow f \text{ é crescente (decrescente) em } [a,b]$$

13. Se f é regular em $[a, b]$, então

$$\forall_{x\in]a,b[} f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f \text{ é constante em } [a,b]$$

14. Aproximação Polinomial g:

$$f^{(n)} \text{ regular em } [a,b] \Longrightarrow g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

- Aproximação Linear $(n = 1) \Longrightarrow g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ (Gráfico é Recta).
- Aproximação Quadrática $(n = 2) \Longrightarrow g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$ (Gráfico é Parábola).

15. Indeterminação $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$: Se f e g são diferenciáveis em $]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[$ $(\delta > 0)$ e

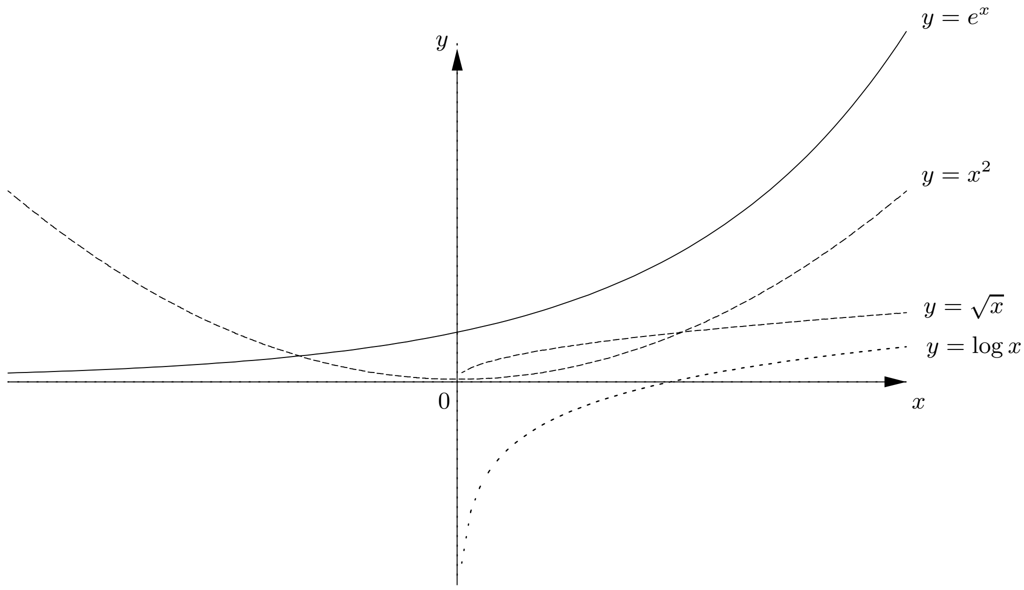
$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Nota:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[p]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[p]{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \ (p, k \in \mathbb{N},\ p \geq 2)$$



16. Indeterminação $(\pm\infty)0$: Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então

    (a)
    $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

    Nota: Por vezes não convém fazer essa redução. Exemplo:
    $$\lim_{x\to 0} x\log|x| = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{\log|x|}} = \frac{0}{0}$$
    não é boa estratégia.

    (b) Se $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ (0^-) então
    $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

17. Indeterminação $+\infty - \infty$: Se
    $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \text{infinito do mesmo sinal}(+\infty \text{ ou } -\infty)$$
    então
    $$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$
    e:

    Se $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lambda \neq 1$ então
    $$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \pm\infty$$

Se $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=(\pm\infty)0$$

18. Se f tem mínimo ou máximo local (ou global) em $x_0\in$ interior(I) e f é derivável em x_0, então $f'(x_0)=0$.

    Nota: Não é válido para pontos fronteiros. Exemplo: Para a função

    $$f:x\mapsto\sqrt{x}$$

    $x=0$ é ponto fronteiro e é mínimo local e global de f. No entanto $f'_d(0)=+\infty$.

19. Se f é duas vezes continuamente diferenciável em I e x_0 é interior de I, então

$$\begin{aligned} f'(x_0)=0 \text{ e } f''(x_0)>0 &\implies f \text{ tem mínimo local em } x_0\\ f'(x_0)=0 \text{ e } f''(x_0)<0 &\implies f \text{ tem máximo local em } x_0\end{aligned}$$

20. Se f' é regular em $[a,b]$, então

$$f \text{ é convexa (côncava) em } [a,b]\Longrightarrow\forall_{x\in]a,b[}\,f''(x)\geq 0\ (\leq 0)$$

$$\forall_{x\in]a,b[}\,f''(x)>0\ (<0)\Longrightarrow f \text{ é convexa (côncava) em } [a,b]$$

21. Se f é convexa (côncava) num intervalo I, então todo o mínimo (máximo) local de f em I é global.

22. Se f e g são contínuas em $[a,b]$, então

    - $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, com F uma primitiva de f em $[a,b]$ (a pode ser maior que b).
    - $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$
    - $\int\limits_a^a f(x)dx=0$.
    - $\forall\lambda\neq 0:\ \int\limits_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int\limits_a^b f(x)dx$.
    - $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$

- $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$, com f contínua em $[a,b]$ e $[b,c]$ (a pode ser maior do que b e c maior do que a e b).
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$, com φ continuamente derivável e injectiva em $[c,d]$ e $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$.

23. f contínua em $[a,b] \Longrightarrow f$ tem primitiva em $[a,b] \Longrightarrow f$ é integrável em $[a,b]$ $\left(\int\limits_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}\right)$

24. Se f é contínua e não identicamente nula em $[a,b]$, então

$$\forall\ x \in [a,b]\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$$

25. Se $a,b \in \mathbb{R}$, f é contínua e não negativa em $[a,b]$ e R é a região plana definida por

$$R = \{(x,y):\ a \leq x \leq b\ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

então a área $A(R)$ de R é dada por

$$A(R) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

26. Se $a,b \in \mathbb{R}$, f e g são contínuas em $[a,b]$ tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ e R é a região plana definida por

$$R = \{(x,y):\ a \leq x \leq b\ \wedge\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

então a área $A(R)$ de R é dada por

$$A(R) = \int\limits_a^b \left[g(x) - f(x)\right]dx$$

27. Integral impróprio de 1ª Espécie:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

com F uma primitiva de f no intervalo de extremos a e b, onde f é contínua.

28. Integral impróprio: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

29. Integral impróprio: $\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx$, $(\lambda \neq 0)$.

30. Se $\int\limits_a^b f(x)dx$ e $\int\limits_a^b g(x)dx$ são convergentes, então $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx$ é convergente e

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$$

31. Se $\int\limits_a^b f(x)dx$ e $\int\limits_b^c f(x)dx$ são convergentes, então $\int\limits_a^c f(x)dx$ é convergente e

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

32. Se $\int\limits_a^b f(x)dx$ é um integral impróprio de 1ª espécie, φ é continuamente diferenciável num intervalo de extremos c e d e

$$\lim_{t \to c} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t \to d} \varphi(t) = b$$

então

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^d f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt$$

33. Se f é não negativa, não nula e contínua num intervalo de extremos a e b $(a < b)$, então

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0 \text{ ou } \int\limits_a^b f(x)dx = +\infty$$

34. Critérios de Convergência para Funções Não Negativas (**Tabela**)
    - 1º Critério de Comparação
    - 2º Critério de Comparação

35. Convergência de Integrais Impróprios de Funções com Sinal Constante em Subintervalos – Semelhante ao caso anterior, usando a função simétrica de f quando f é não positiva.

36. Integral Impróprio absolutamente convergente é convergente, isto é

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ é convergente } \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ é convergente}$$

Além disso,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

se o integral impróprio é absolutamente convergente.

37. Se f é limitada num intervalo de extremos $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ e tem um número finito de descontinuidades nesse intervalo, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é convergente.

Nota: Esta propriedade não pode ser usada para integrais impróprios que tenham pelo menos um limite de integração a ou b infinito. As fórmulas de substituição 6. e de decomposição de domínio 5. podem ser usadas para transformar esses integrais em integrais com limites de integração reais.

6 Notação $\dfrac{dy}{dx}$ para derivada

- Dada a função $f : x \longrightarrow y = f(x)$, a derivada $f'(x)$ pode também ser notada por $\dfrac{dy}{dx}$ e a derivada de ordem $n \geq 2$, $f^{(n)}(x)$, por $\dfrac{d^n y}{dx^n}$. Além disso tem-se

$$\forall_{n\geq 2}\ \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

- Adição e Subtracção: $\dfrac{d}{dx}(y \pm z) = \dfrac{dy}{dx} \pm \dfrac{dz}{dx}$

- Multiplicação: $\dfrac{d}{dx}(y \cdot z) = z\dfrac{dy}{dx} + y\dfrac{dz}{dx}$

- Divisão: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{z}\right) = \dfrac{z\dfrac{dy}{dx} - y\dfrac{dz}{dx}}{z^2}$

- Composição: $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$,
  onde $f : x \longrightarrow y = f(x)$, $g : y \longrightarrow z = g(y)$, $g \circ f : x \longrightarrow z = g[f(x)]$.

- Função inversa: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$,
  onde $f : x \longrightarrow y = f(x)$ e $f^{-1} : y \longrightarrow x = f^{-1}(y)$

7 Coordenadas Paramétricas e Polares

<u>Coordenadas Paramétricas</u>

Curva em coordenadas paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \varphi(t) \\ y & = & \psi(t) \end{array} \right. , \; t \in [t_0, T]$$

1. φ injectiva $\Longrightarrow$ Curva é gráfico de uma função $f : x \longrightarrow y = f(x)$ com $f = \psi \circ \varphi^{-1}$

   ψ injectiva $\Longrightarrow$ Curva é gráfico de uma função $g : y \longrightarrow x = g(y)$ com $f = \varphi \circ \psi^{-1}$

2. Cálculo das Derivadas de uma Função representada por coordenadas paramétricas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\frac{dx}{dt}}, n = 2, 3, \ldots$$

3. Traçado de uma Curva em Coordenadas Paramétricas:

   - Calcular abcissas (usar $\varphi(t)$) e ordenadas (usar $\psi(t)$) de pontos da curva, dando valores à variável t.
   - Verificar se há simetrias em relação aos eixos $X'X$, $Y'Y$ e à origem.
   - Estudar as funções representadas pelas equações paramétricas correspondentes aos vários subintervalos onde φ é injectiva.

4. Área de uma Região Plana definida por Curvas em Coordenadas Paramétricas

$$A_R = \left| \int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)dt \right| = \left| \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\psi'(t)dt \right|$$

5. Área de uma Região Limitada por uma Curva Fechada ($\varphi(t_0) = \varphi(T)$ e $\psi(t_0) = \psi(T)$)

$$A_R = -\int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)dt = -\int_{t_0}^{T} y\frac{dx}{dt}dt$$

ou

$$A_R = \int_{t_0}^{T} \varphi(t)\psi'(t)dt = \int_{t_0}^{T} x\frac{dy}{dt}dt$$

ou

$$A_R = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dt$$

<u>Coordenadas Polares</u>

Curva em coordenadas polares

$$\rho = f(\theta) \text{ ou } F(\rho,\theta) = 0$$

1. Traçado de Curva $\rho = f(\theta)$:

   Equações Paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}, \ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

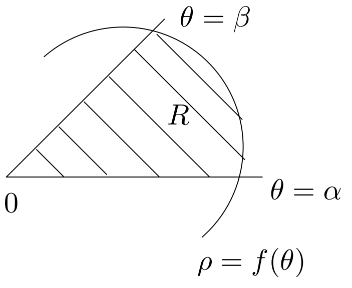
2. Traçado da Curva $\rho = f(\theta)$ ou $F(\rho,\theta) = 0$, onde

   Eixo Polar coincidente com semi-eixo OX,

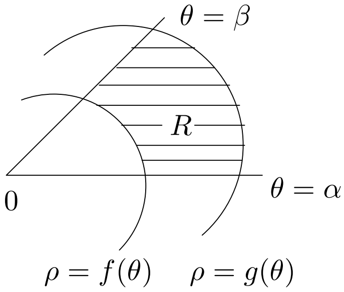
   Pólo coincidente com origem O do sistema XOY.

   - Calcular pontos do plano, dando valores a θ e calculando o respectivo ρ.
   - Verificar se há simetrias em relação aos eixos $X'X$ e $Y'Y$ e à origem.

3. Área de uma região limitada por um arco de equação $\rho = f(\theta)$ e raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$:



$$A_R = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta$$



$$A_R = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(g^2(\theta) - f^2(\theta)\big)\, d\theta$$

II - Desenvolvimento da Matéria

1 Módulos e Funções Circulares

Propriedade 1

1. *$x \leq |x|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$;*
2. *$|x+y| \leq |x| + |y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

1. Se $x \geq 0$, $|x| = x$. Se $x < 0$, então

$$x < 0 < -x = |x|$$

   Donde $x \leq |x|$ em ambos os casos.

2. Dois casos podem acontecer:

   (a) Se $x + y \geq 0$, então
   $$|x+y| = x + y$$
   Mas por 1., $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$. Donde
   $$|x+y| \leq |x| + |y|$$

   (b) Se $x + y < 0$, então
   $$|x+y| = -(x+y) = -x - y$$
   Mas, por 1.,
   $$-x \leq |-x| = |x|, \ -y \leq |-y| = |y|$$
   Donde $|x+y| \leq |x| + |y|$.

$\square$

Propriedade 2

1. *$\forall x \in [-1, 1]$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ para qualquer $x \in [-1, 1]$.*
2. *$\forall x \in [-1, 1]$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ para qualquer $x \in [-1, 1]$.*
3. *$\forall x \in [-1, 1]$ $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.*

Demonstração:

1. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$
ou seja,
$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$
Portanto
$$\begin{aligned} \sin^2(\arccos x) &= 1 - \cos^2(\arccos x) \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$
Além disso,
$$0 \leq \arccos x \leq \pi$$
e por isso
$$\sin(\arccos x) \geq 0$$
Então
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

2. A demonstração é semelhante à anterior, desde que se recorde que
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$
e que por isso
$$\cos(\arcsin x) \geq 0$$

3. Seja $y = \arcsin x$. Então $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\sin y = x$. Além disso
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$$
Mas $\arccos x \in [0, \pi]$ e portanto
$$\frac{\pi}{2} - \arccos x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
Como a função seno é injectiva em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então
$$x = \sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$
o que demonstra o resultado. $\square$

Propriedade 3

1. $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{k\in\mathbb{Z}} \arccos(\cos x) = \pm x + 2k\pi$;

2. $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{k\in\mathbb{Z}} \arcsin(\sin x) = (-1)^k x + k\pi$;

3. $\forall_{x\in\mathbb{R}-\left\{(2t+1)\frac{\pi}{2}:\ t\in\mathbb{Z}\right\}} \exists_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + k\pi$.

Demonstração: Iremos apenas provar 2., pois as outras duas propriedades são semelhantes.

(a) Se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então, por definição de função inversa,

$$y = \sin x \Longleftrightarrow x = \arcsin y$$

com $y \in [-1, 1]$. Substituindo y por $\sin x$ na segunda equação, vem

$$x = \arcsin(\sin x)$$

Portanto 2. é verdadeira para $k = 0$.

(b) Se $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, então $\pi - x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

por (a). Então 2. é verdadeira com $k = 1$.

(c) Se $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, então existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x + 2t\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

e há dois possíveis casos:

(i) Se $x + 2t\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então, por (a), tem-se

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin(\sin(x + 2t\pi)) \\ &= x + 2t\pi = (-1)^{2t} + 2t\pi \end{aligned}$$

e portanto 2. é verdadeira com $k = 2t$.

(ii) Se $x + 2t\pi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ então por (b), vem

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin(\sin(x + 2t\pi)) \\ &= \pi - (x + 2t\pi) = -x + (1 - 2t)\pi \\ &= (-1)^{1-2t}x + (1 - 2t)\pi \end{aligned}$$

□

2 Funções hiperbólicas

Definição 1 *Para qualquer* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Consequências da definição:

(i) $\operatorname{ch} x > 0$, pois $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x$, pois a soma de dois números positivos é sempre superior à sua diferença.

Definição 2 *Para qualquer* $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Notar que $\operatorname{th} x$ existe para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois $\operatorname{ch} x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso

$$|\operatorname{th} x| = \frac{|\operatorname{sh} x|}{\operatorname{ch} x} < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 4

1. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

2. $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

3. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

1. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$

2. $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$

3. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$

□

As fórmulas das funções hiperbólicas apresentadas na tabela 3 são consequências mais ou menos imediatas das definições de $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{th} x$. A título de exemplo provemos uma dessas propriedades.

Propriedade 5 *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

Demonstração: Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[e^x e^y + e^{-x} e^{-y} + \left(e^x e^{-y} + e^{-x} e^y\right) + e^x e^y + e^{-x} e^{-y} - \left(e^x e^{-y} + e^{-x} e^y\right)\right] \\
&= \frac{2}{4}\left(e^x e^y + e^{-x} e^{-y}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{x+y} + e^{-(x+y)}\right] = \operatorname{ch}(x+y)
\end{aligned}$$

□

Funções hiperbólicas inversas

(I) Função Argumento Cosseno Hiperbólico

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

não é injectiva (ver gráfico em Tabela 2) em $\mathbb{R}$, mas é injectiva em $[0,+\infty[$. Além disso $\mathrm{CD}_f = [1,+\infty[$. Então a sua restrição a $[0,+\infty[$ tem a inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}:[1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{argch} y \end{aligned}$$

Da definição de função inversa, tem-se

$$\forall_{x\in[0,+\infty[}\forall_{y\in[1,+\infty[}\,[y=\operatorname{ch} x \Longleftrightarrow x=\operatorname{argch} y]$$

e portanto

$$\forall_{x\in[0,+\infty[}\ \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x)=x$$

$$\boxed{\forall_{y\in[1,+\infty[}\ \operatorname{ch}(\operatorname{argch} y)=y}$$

Para $x<0$, $\operatorname{ch} x$ existe e tem-se

$$\operatorname{argch}(\operatorname{ch} x)=\operatorname{argch}(\operatorname{ch}(-x))=-x$$

pois $-x>0$. Donde

$$\boxed{\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x)=|x|}$$

(II) Função Argumento Seno Hiperbólico

A função:

$$f:x\longmapsto \operatorname{sh} x$$

é injectiva em $\mathbb{R}$ e portanto tem inversa ($\mathrm{CD}_f=\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} f^{-1}:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{argsh} y \end{aligned}$$

Donde

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ \ [y=\operatorname{sh} x \Longleftrightarrow x=\operatorname{argsh} y]$$

ou seja,

$$\boxed{\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x)=x,\ \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)=x}$$

(III) Função Argumento Tangente Hiperbólica

A função:

$$f : x \longmapsto \operatorname{th} x$$

é injectiva em $\mathbb{R} = \mathrm{D}_f$ e o seu contradomínio é $]-1,1[$. Donde tem inversa:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} :]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argth} y \end{array}$$

Portanto

$$\forall_{y \in]-1,1[} \ \forall_{x \in \mathbb{R}} \ [y = \operatorname{th} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{argth} y]$$

Substituindo x pelo seu valor $\operatorname{argth} y$ na primeira equação, vem

$$\boxed{\forall_{y \in]-1,1[} \ \operatorname{th}(\operatorname{argth} y) = y}$$

Fazendo o mesmo com y, vem

$$\boxed{\forall_{x \in \mathbb{R}} \ \operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x}$$

Para calcular os valores das funções hiperbólicas inversas, tem-se

Propriedade 6

1. $\operatorname{argch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ *para qualquer* $x \geq 1$.
2. $\operatorname{argsh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *para qualquer* $x \in]-1,1[$.

Demonstração: Provemos apenas 1., pois as demonstrações de 2. e 3. são semelhantes. Seja

$$y = \operatorname{argch} x$$

e provemos que

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Da definição de função inversa, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} y = x \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \Longleftrightarrow e^y + \frac{1}{e^y} = 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2x\, e^y + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Para $x = 1$ tem-se $\sqrt{x^2 - 1} = -\sqrt{x^2 - 1} = 0$. Por outro lado, para $x > 1$, tem-se

$$\operatorname{argsh} x > 0 \Longrightarrow e^y > 1$$

Mas

$$\begin{aligned} 0 < x-1 < x+1 &\Longrightarrow (x-1)^2 < x^2-1 \Longrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{x^2-1} \\ &\Longrightarrow x-1 < \sqrt{x^2-1} \Longrightarrow x - \sqrt{x^2-1} < 1 \end{aligned}$$

Donde é impossível ter-se

$$e^y = x - \sqrt{x^2-1}$$

Então

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1}$$

e

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

□

3 Funções Limitadas, Ínfimo, Supremo, Máximo e Mínimo

Uma função f é Limitada Superiormente, Limitada Inferiormente ou Limitada se e só se o seu contradomínio é um conjunto limitado superiormente, limitado inferiormente ou limitado respectivamente. Da definição de contradomínio obtêm-se as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} f \text{ é limitada superiormente} &\Longleftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f\ f(x) \leq M \\ f \text{ é limitada inferiormente} &\Longleftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f\ f(x) \geq m \\ f \text{ é limitada} &\Longleftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, m \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f\ m \leq f(x) \leq M \\ &\Longleftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^+\ |f(x)| \leq b \end{aligned}$$

O gráfico de uma função limitada superiormente (inferiormente) não pode estar acima (abaixo) de uma recta paralela ao eixo X'X. Além disso o gráfico de uma função limitada está compreendido entre duas rectas paralelas ao eixo X'X.

Um exemplo de uma função limitada inferiormente mas não superiormente é a função exponencial

$$f : x \longrightarrow a^x\ (a > 1)$$

Na realidade $a^x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ mas não é possível encontrar um $\beta > 0$ tal que $a^x \leq \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado a função seno é limitada, pois $-1 \leq \sin x \leq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Se f é limitada superiormente (inferiormente) então pelo axioma da continuidade o seu contradomínio tem supremo (ínfimo). A esse número real S (I) dá-se o nome de Supremo (Ínfimo) de f e escreve-se

$$S = \sup_{x \in D_f} f(x),\ I = \inf_{x \in D_f} f(x)$$

Assim 0 é o ínfimo da função exponencial e -1 e 1 são respectivaemente o ínfimo e o supremo da função seno.

Se existe um $x \in D_f$ tal que $f(x) = S$, isto é, se $S \in CD_f$ então S toma o nome de Máximo Absoluto ou simplesmente Máximo de f e escreve-se

$$S = \max_{x \in D_f} f(x)$$

Do mesmo modo, se existe um $x \in D_f$ tal que $f(x) = I$ então chama-se Mínimo Absoluto ou simplesmente Mínimo de f e escreve-se

$$I = \min_{x \in D_f} f(x)$$

Os números reais onde a função f atinge o máximo e o mínimo, isto é, os números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = S$ e $f(x_2) = I$, chamam-se respectivamente Maximizante e Minimizante. Por outro lado, se $S \notin CD_f$ ($I \notin CD_f$) diz-se que f não admite máximo (mínimo). Assim por exemplo a função exponencial não tem mínimo pois não existe nenhum número real x tal que $a^x = 0$. Por outro lado, 1 é o máximo da função seno sendo os seus maximizantes da forma $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4 Funções Monótonas

Se f é uma função real de variável real então

(i) f é crescente $\Longleftrightarrow \forall x \in D_f \ \forall x' \in D_f \ [x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')]$

(ii) f é decrescente $\Longleftrightarrow \forall x \in D_f \ \forall x' \in D_f \ [x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')]$

Diz-se que f é Monótona se for crescente ou decrescente.

Para verificar se uma função é monótona, tem de se estudar o sinal de $f(x) - f(x')$ para quaisquer x e x' tais que $x < x'$. Assim por exemplo para estudar a monotonia da função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = 2x + 1 \end{array}$$

sejam x, x' dois números reais quaisquer tais que $x < x'$. Então

$$f(x) - f(x') = (2x+1) - (2x'+1) = 2(x - x') < 0$$

Donde

$$x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$$

e f é crescente em $\mathbb{R}$.

Em geral é difícil estudar a monotonia de uma função a partir da definição. Como veremos mais adiante a derivada de uma função será muito útil a este respeito.

5 Exercícios sobre Igualdades e Desigualdades

Exercício 1 *Resolva a seguinte equação*

$$\operatorname{arctg} \left| x^3 - 4x^2 + 3 \right| = 0$$

Resolução: O gráfico da função arco tangente mostra que

$$\operatorname{arctg} \left| x^3 - 4x^2 + 3 \right| = 0 \Longleftrightarrow \left| x^3 - 4x^2 + 3 \right| = 0$$

Além disso

$$\left| x^3 - 4x^2 + 3 \right| = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

Portanto o problema reduz-se à determinação das raízes de um polinómio de grau 3. Como $x = 1$ satisfaz

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

então

$$x^3 - 4x^2 + 3 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

A determinação do polinómio $ax^2 + bx + c$ pode ser feita usando a Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & & 1 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \boxed{0} \end{array} = R$$

Donde

$$x^3 - 4x^2 + 3 = (x-1)(x^2 - 3x - 3) = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 - 3x - 3 = 0$$

Mas

(i) $x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$

(ii) Para determinar as raízes de $x^2 - 3x - 3 = 0$, tem-se

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-3) = 21 > 0$$

e portanto as raízes são

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{2}$$

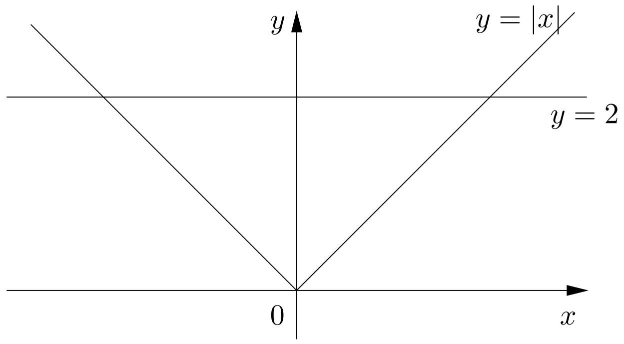
Então as raízes da equação são

$$x = 1 \vee x = \frac{6 + \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{6 - \sqrt{21}}{2}$$

Exercício 2 *Resolva a seguinte inequação*

$$\left| \frac{\log x + 1}{\log x + 2} \right| \geq 2$$

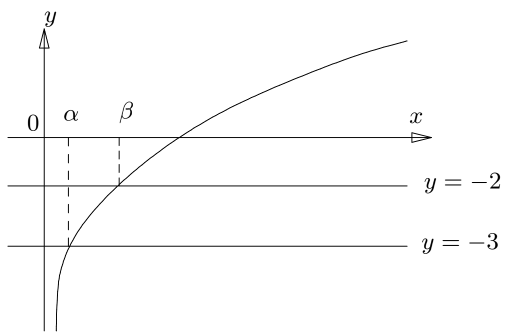
Do gráfico da função módulo tem-se



$$\left|\frac{\log x+1}{\log x+2}\right|\geq 2 \Longleftrightarrow \frac{\log x+1}{\log x+2}\geq 2 \vee \frac{\log x+1}{\log x+2}\leq -2$$

(i) Resolução de $\dfrac{\log x+1}{\log x+2}\geq 2$:

$$\begin{aligned}\frac{\log x+1}{\log x+2}\geq 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\log x+1-2(\log x+2)}{\log x+2}\geq 0\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{-\left(\log x+3\right)}{\log x+2}\geq 0\end{aligned}$$



Do gráfico da função logaritmo, tem-se o seguinte quadro:

	0		α		β		$+\infty$
$\log x+3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\log x+2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
F		$-$	0	$+$	N	$-$	

Os valores de α e de β são determinados resolvendo as equações

$$\log x=-3,\ \log x=-2$$

respectivamente (pois são as abcissas dos pontos de intersecção da curva de equação $y=\log x$ com as rectas $y=-3$ e $y=-2$ respectivamente). Donde

α: $\log x=-3 \Longrightarrow e^{\log x}=e^{-3}\Longrightarrow x=e^{-3}$

β: $\log x=-2 \Longrightarrow e^{\log x}=e^{-2}\Longrightarrow x=e^{-2}$

Então:

$$\frac{\log x+1}{\log x+2}\geq 2 \Longleftrightarrow x\in [e^{-3},e^{-2}[$$

(ii) Resolução de $\dfrac{\log x+1}{\log x+2}\leq -2$:

$$\begin{aligned}\frac{\log x+1}{\log x+2}\leq -2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\log x+1+2\log x+4}{\log x+2}\leq 0\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{3\left(\log x+\frac{5}{3}\right)}{\log x+2}\leq 0\end{aligned}$$

Procedendo como anteriormente (determinação de α e β é semelhante ao caso anterior), obtém-se o seguinte quadro:

	0		α		β		$+\infty$
$\log x + \frac{5}{3}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\log x + 2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
F		$+$	N	$-$	0	$+$	

Donde:

$$\frac{\log x + 1}{\log x + 2} \leq -2 \Longleftrightarrow x \in]e^{-2}, e^{-\frac{5}{3}}]$$

Então tem-se

$$\begin{aligned} \left|\frac{\log x + 1}{\log x + 2}\right| \geq 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in [e^{-3}, e^{-2}[\ \vee \ x \in]e^{-2}, e^{-\frac{5}{3}}] \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in [e^{-3}, e^{-2}[\cup]e^{-2}, e^{-\frac{5}{3}}] \end{aligned}$$

Exercício 3 *Determine o domínio da seguinte função:*

$$f : x \longmapsto \frac{\log\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{e^x - 1} - 2}$$

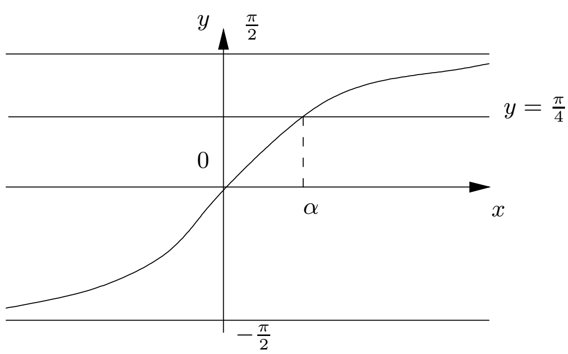
Resolução: O Domínio de uma função determina-se retirando ao conjunto dos números reais os conjuntos definidos pelas restrições apresentadas na fórmula que define a função. Assim, no nosso caso têm-se as seguintes restrições:

(i) $\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} > 0$

(ii) $e^x - 1 \geq 0$

(iii) $\sqrt{e^x - 1} \neq 2$

(i)



Tendo em conta o gráfico da função arco tangente tem-se o seguinte quadro:

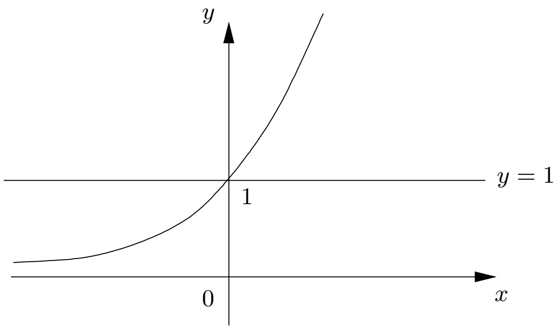
	$-\infty$		α		$+\infty$
$\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}$		$-$	0	$+$	

A determinação de α é feita a partir da função inversa:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = 1$$

Donde $\alpha = 1$ e $x \in]1, +\infty[$.

(ii)



Do gráfico da função exponencial, tem-se o seguinte quadro:

	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	

Donde $x \geq 0$.

(iii) Para resolver $\sqrt{e^x - 1} \neq 2$, considera-se a equação

$$\sqrt{e^x - 1} = 2$$

Então $x \geq 0$ para se ter $e^x - 1 \geq 0$ e

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{e^x - 1}\right)^2 = 2^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x - 1 = 4 \Longleftrightarrow e^x = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \log 3 \end{aligned}$$

Donde

$$\sqrt{e^x - 1} \neq 2 \Longleftrightarrow x \neq \log 3$$

De (i), (ii) e (iii) tem-se

$$x > 1 \wedge x \geq 0 \wedge x \neq \log 3$$

e portanto

$$\mathrm{D}_f =]1, \log 3[\cup] \log 3, +\infty[$$

Exercício 4 *Calcule*

$$\arcsin\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$$

Resolução: Tem-se
$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
e
$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$
Donde
$$\arcsin\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Exercício 5 *Mostre que*

$$\operatorname{tg}(\arccos x) + \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Resolução: Como

$$\cos(\arccos x) = x \wedge \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x)$$

então
$$\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2$$
Mas $\arccos x \in [0, \pi]$ e portanto $\sin(\arccos x) \geq 0$. Donde
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Então
$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
Por outro lado,
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \wedge 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}$$
e
$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$
Mas $\operatorname{arctg} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e portanto $\cos(\operatorname{arctg} x) > 0$. Então
$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donde
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\cos(\operatorname{arctg} x)} \Longrightarrow x = \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$
e
$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
Portanto
$$\operatorname{tg}(\arccos x) + \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercício 6 *Resolva a equação*

$$\operatorname{argsh}\left(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3\right) = 0$$

Resolução: Do gráfico da função argsh tem-se

$$\operatorname{argsh}\left(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3\right) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

Para resolver a segunda equação, faz-se a mudança de variável $y = \operatorname{tg} x$ para se obter

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Esta equação tem raízes $y = 3$ e $y = -1$. Donde tem-se

$$\operatorname{tg} x = 3 \vee \operatorname{tg} x = -1$$

Mas:

(i)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = 3 &\Longrightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arctg} 3 \\ &\Longrightarrow x + k\pi = \operatorname{arctg} 3,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = -1 &\Longrightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{arctg}(-1) \\ &\Longrightarrow x + k\pi = -\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donde as raízes da equação dada são

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

e

$$x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercício 7 *Determine o contradomínio da função*

$$f : x \longmapsto 1 + \sin x$$

Resolução:

$$\mathrm{CD}_f = \left\{ y \in \mathbb{R} :\ \exists_{x \in \mathrm{D}_f}\ y = f(x) \right\}$$

Portanto para calcular CD_f é preciso determinar o conjunto dos números reais y para os quais existem $x \in \mathrm{D}_f$ satisfazendo $y = f(x)$. Por isso há que primeiramente obter a expressão de x a partir de

$$y = f(x) = 1 + \sin x$$

ou seja, resolver esta equação em ordem a x. Mas

$$\begin{aligned} y = 1 + \sin x &\iff y - 1 = \sin x \\ &\iff \arcsin(\sin x) = \arcsin(y-1) \\ &\iff (-1)^k x + k\pi = \arcsin(y-1), \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = (-1)^k \left[\arcsin(y-1) + k\pi\right], \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Então

$$\mathrm{CD}_f = \{y \in \mathbb{R} : \ -1 \leq y - 1 \leq 1\} = [0, 2]$$

pois:

(i) $y - 1 \geq -1 \iff y \geq 0$

(ii) $y - 1 \leq 1 \iff y \leq 2$

Exercício 8 *Dadas as funções* $f : x \longmapsto \log x = y$ *e* $g : y \longmapsto \operatorname{argch}(y+5) = z$*, determine a função* $g \circ f$ *e o respectivo domínio.*

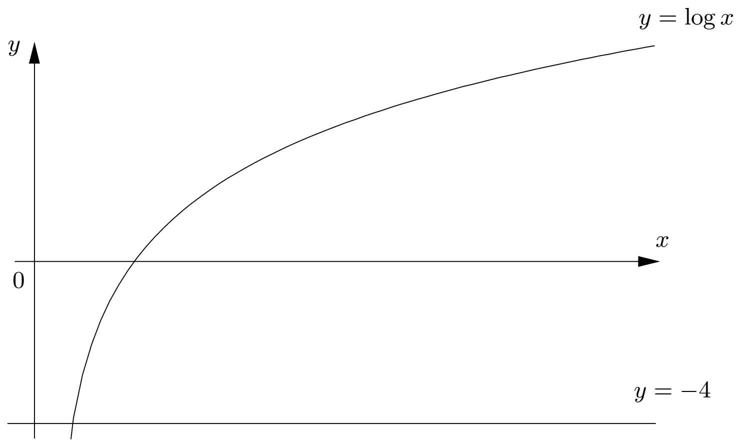
Resolução: Para cada x tem-se

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = \operatorname{argch}(\log x + 5)$$

Para calcular o domínio de $g \circ f$ tem-se:

(i) $x > 0$

(ii) $\log x + 5 \geq 1 \Longrightarrow \log x \geq -4 \Longrightarrow x \geq e^{-4}$



Donde:

$$\begin{aligned} g \circ f : [e^{-4}, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{argch}(\log x + 5) \end{aligned}$$

Exercício 9 *Verifique se a função* $f : x \longmapsto \operatorname{ch} x$ *é par ou ímpar.*

Resolução: Como $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ e

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

então f é par.

6 Propriedades dos Limites de Funções

Nesta secção apresentamos as demonstrações de quatro propriedades das operações com limites.

Propriedade 7 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ *e* ℓ, m *são números reais, então*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \ell + m$$

Demonstração: Consideremos apenas o caso de a ser um número real. Então temos que provar que para qualquer $\theta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta \wedge x \neq a \Longrightarrow |f(x) + g(x) - (\ell + m)| < \theta$$

Seja então θ um número positivo qualquer e procuremos o $\delta > 0$ que torna possível essa implicação. Como

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

então para $\theta > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta_1 \wedge x \neq a \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\theta}{2}$$

Do mesmo modo

$$\lim_{x\to a} g(x) = m$$

implica que para esse $\theta > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta_2 \wedge x \neq a \Longrightarrow |g(x) - m| < \frac{\theta}{2}$$

Como

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (\ell + m)| &= |(f(x) - \ell) + (g(x) - m)| \\ &\leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| \end{aligned}$$

então para

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

tem-se

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \wedge x \neq a &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-a| < \delta_1 \wedge x \neq a \\ |x-a| < \delta_2 \wedge x \neq a \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |f(x) - \ell| < \frac{\theta}{2} \\ |g(x) - m| < \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow |f(x) + g(x) - (\ell + m)| < \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta \end{aligned}$$

Isso estabelece o resultado. □

Propriedade 8 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ *e* ℓ, m *são números reais, então*

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \ell \cdot m$$

Demonstração: Consideremos apenas o caso de a ser $+\infty$, pois as demonstrações dos outros casos são semelhantes. Tal como anteriormente, temos de mostar que para qualquer $\theta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Longrightarrow |f(x) \cdot g(x) - \ell m| < \theta$$

Seja então θ um número qualquer positivo e procuremos o número $\delta > 0$ que torna possível essa implicação. Tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - \ell m| &= |f(x) \cdot g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell m| \\ &\leq |f(x) - \ell|\ |g(x)| + |\ell|\ |g(x) - m| \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = m$$

então para esse $\theta > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x > \delta_1 \Longrightarrow |g(x) - m| < \frac{\theta}{2(1 + |\ell|)}$$

Portanto para $x > \delta_1$,

$$m - \frac{\theta}{2(1+|\ell|)} < g(x) < m + \frac{\theta}{2(1+|\ell|)}$$

Como $-|m| \leq m \leq |m|$, $\theta > 0$ e $|\ell| \geq 0$, então

$$|g(x)| < \alpha = |m| + \frac{\theta}{2(1+|\ell|)}$$

para $x > \delta_1$. Por outro lado

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

implica que para o mesmo $\theta > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$x > \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\theta}{2\alpha}$$

Portanto para $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se

$$x > \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x > \delta_1 & \Longrightarrow & |g(x) - m| < \dfrac{\theta}{2(1+|\ell|)} \wedge |g(x)| < \alpha \\ \\ x > \delta_2 & \Longrightarrow & |f(x) - \ell| < \dfrac{\theta}{2\alpha} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) \cdot g(x) - \ell m| < \frac{\theta}{2\alpha} \cdot \alpha + |\ell| \cdot \frac{\theta}{2(1+|\ell|)} < \theta$$

Isso estabelece o resultado. $\square$

Propriedade 9 *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell < 0$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, *então*

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = -\infty$$

Demonstração: Iremos apenas considerar o caso de a ser $-\infty$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell < 0$, então para qualquer $\theta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x < -\delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \theta$$

ou seja,

$$\ell - \theta < f(x) < \ell + \theta$$

para $x < -\delta$. Em particular, para $\theta > 0$ tal que $\alpha = \ell + \theta < 0$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$x < -\delta_1 \Longrightarrow f(x) < \alpha < 0$$

Provámos assim que $f(x)$ é negativa quando x pertence ao intervalo $]-\infty, -\delta_1[$.

Para estabelecer o resultado pretendido, temos que provar que para qualquer $\theta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x < -\delta \Longrightarrow f(x)\, g(x) < -\theta$$

Como

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$$

então para esse $\theta > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$x < -\delta_2 \Longrightarrow g(x) > \theta$$

Portanto para $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se

$$x < -\delta \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x < -\delta_1 & \Longrightarrow & f(x) < 0 \\ & & \\ x < -\delta_2 & \Longrightarrow & g(x) > \theta \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) \cdot g(x) < -\theta$$

Isso estabelece a igualdade. □

Propriedade 10 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = t \neq 0$, *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{t} \cdot$

Demonstração: Consideremos apenas o caso de $a \in \mathbb{R}$. Temos que provar que para qualquer $\theta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \wedge x \neq a \Longrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{t} \right| < \theta$$

Mas

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{t} \right| = \left| \frac{t - f(x)}{t\, f(x)} \right| = \frac{|f(x) - t|}{|f(x)|\,|t|}$$

Para provar o teorema, começamos por mostrar que existe um $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{1}{|f(x)|} < \alpha$$

Como

$$\lim_{x\to a} f(x) = t \neq 0$$

então para qualquer $\theta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \wedge x \neq a \Longrightarrow t - \theta < f(x) < t + \theta$$

Podemos agora considerar dois casos:

(i) Se $t > 0$, então para $\theta > 0$ tal que $t - \theta > 0$, existe um $\delta_1' > 0$ tal que $|x - a| < \delta_1'$ e $x \neq a$ implica
$$f(x) > t - \theta > 0 \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{t - \theta}$$

(ii) Se $t < 0$, então para $\theta > 0$ tal que $t + \theta < 0$, existe um $\delta_1'' > 0$ tal que
$$|x - a| < \delta_1'' \wedge x \neq a \Longrightarrow f(x) < t + \theta < 0$$

Então
$$-f(x) > -(t + \theta) > 0 \Longrightarrow \frac{1}{|-f(x)|} = \frac{1}{|f(x)|} < -\frac{1}{t + \theta}$$

Em ambos os casos existe um $\alpha > 0$ e um $\delta_1 > 0$ (δ_1' ou δ_1'') tais que
$$|x - a| < \delta_1 \wedge x \neq a \Longrightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \alpha$$

Seja agora θ um número real positivo qualquer. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = t \neq 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que
$$|x - a| < \delta_2 \wedge x \neq a \Longrightarrow |f(x) - t| < \frac{\theta|t|}{\alpha}$$

Então para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se
$$|x - a| < \delta \wedge x \neq a \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |x - a| < \delta_1 \wedge x \neq a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|f(x)|} < \alpha \\ \\ |x - a| < \delta_2 \wedge x \neq a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - t| < \frac{\theta|t|}{\alpha} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{t} \right| < \frac{|f(x) - t|}{|f(x)|\,|t|} < \frac{\alpha\theta|t|}{\alpha|t|} = \theta$$

e isso estabelece o resultado pretendido. □

7 Princípio do Enquadramento

Princípio do Enquadramento:

Seja $a = -\infty$, a^-, a, a^+ ou $+\infty$, com $a \in \mathbb{R}$ e I um intervalo contendo a ou com extremo em a. Se
$$\forall_{x \in I}\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
e
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$$
então
$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$$
onde $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Demonstração: Consideremos apenas o caso em que $a = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Temos que provar que, para qualquer $\theta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$x > \delta \Longrightarrow l - \theta < g(x) < l + \theta$$

Como
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$$
então para esse $\theta > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que
$$x > \delta_1 \Rightarrow \ell - \theta < f(x) < \ell + \theta$$
e
$$x > \delta_2 \Rightarrow \ell - \theta < h(x) < \ell + \theta$$
Mas $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$ e portanto $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ torna verdadeira a implicação pretendida. □

Aplicação do Princípio do Enquadramento: Mostrar que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{1}$$
No cálculo deste limite não se podem usar as propriedades da Tabela 3, pois
$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$
não existe (funções periódicas não podem ter limite quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$). Mas
$$0 \leq |\sin x| \leq 1$$
para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e portanto podemos suprimir $\sin x$ por enquadramento. Com efeito tem-se
$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$
Como
$$\lim_{x\to+\infty} 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$
então pelo Princípio do Enquadramento, tem-se
$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0$$
Para estabelecer o resultado pretendido, notemos que $-|a| \leq a \leq |a|$ para qualquer número real. Isso torna possível fazer desaparecer o módulo por enquadramento. Com efeito, tem-se
$$-\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{\sin x}{x} \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$
e
$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \left[-\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right] = 0$$
Donde
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Como exemplo de aplicação desse resultado, mostremos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sin\left|\frac{x^3+2}{x}\right|}{x^3+2} = 0$$

Com efeito,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x}$$

é mais ou menos infinito e portanto

$$\lim_{x\to-\infty} \left|\frac{x^3+2}{x}\right| = +\infty$$

Além disso quando x tende para $-\infty$,

$$\frac{x^3+2}{x} > 0 \Longrightarrow \left|\frac{x^3+2}{x}\right| = \frac{x^3+2}{x}$$

Então de (1), vem

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sin\left|\frac{x^3+2}{x}\right|}{x^3+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin\left|\frac{x^3+2}{x}\right|}{\left|\frac{x^3+2}{x}\right|} = 0$$

8 Funções Contínuas

Como exemplo de uma demonstração de uma propriedade das funções contínuas provemos o seguinte resultado.

Propriedade 11 *Se f é contínua em A, g é contínua em B e $f(A) \subseteq B$, então*

$$g \circ f : x \longmapsto g\left[f(x)\right]$$

é contínua em A.

Demonstração: Temos que provar que para qualquer $a \in A$,

$$\lim_{x\to a} g\left[f(x)\right] = g\left[f(a)\right]$$

Como f é contínua em A e $a \in A$, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Por outro lado $f(A) \subseteq B$ e portanto g é contínua em $f(A)$. Donde para qualquer $b \in f(A)$,

$$\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$$

Em particular para $b = f(a)$ vem

$$\lim_{y\to f(a)} g(y) = g\left[f(a)\right]$$

Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \;\wedge\; \lim_{y \to f(a)} g(y) = g\left[f(a)\right]$$

Donde

$$\lim_{x \to a} g\left[f(x)\right] = g\left[f(a)\right]$$

e $g \circ f$ é contínua em a. Como a é um elemento qualquer de A, então $g \circ f$ é contínua em A. □

Um outro resultado importante é apresentado a seguir.

Propriedade 12 *Se f é contínua em $a \in \mathrm{D}_f$ e $f(a) < y$ ($f(a) > y$) então existe um intervalo $I =]a-\delta, a+\delta[$ tal que $f(x) < y$ ($f(x) > y$) para todo $x \in I$.*

Demonstração: Seja f contínua em a e $f(a) < y$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

e portanto para qualquer $\theta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in]a-\delta, a+\delta[\Longrightarrow f(a) - \theta < f(x) < f(a) + \theta$$

Em particular, para $\theta > 0$ tal que $f(a) + \theta < y$ existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) < y$ para $x \in]a-\delta, a+\delta[$. A demonstração para $f(a) > y$ é semelhante. □

9 Propriedades das Funções Contínuas em Intervalos

Teorema dos Valores Intermédios: *Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e y é um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = y$.*

Demonstração: Consideremos sem perda de generalidade que $f(a) < f(y) < f(b)$. Como f é contínua em a, então

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e

$$\forall_{\theta > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \left[a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \theta < f(x) < f(a) + \theta\right]$$

Seja $\theta > 0$ tal que $y = f(a) + \theta$. Para esse θ, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall_{x \in [a, a+\delta[}\ f(x) < y$$

Consideremos agora o conjunto

$$A = \{t \in [a,b] :\ f(x) < y \text{ para todo } x \in [a,t]\}$$

Então A é limitado superiormente por b e existe $c = \sup A$. Para provar o teorema iremos mostrar que $f(c) = y$. Como $f(c)$ e y são dois números reais, então há três hipóteses, a saber $f(c) < y$, $f(c) > y$ ou $f(c) = y$. Para estabelecer o resultado pretendido iremos provar que as duas primeiras são impossíveis.

(i) $f(c) < y$ – Como
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$
então para $\theta > 0$ tal que $f(c) + \theta < y$, existe $\delta > 0$ tal que
$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow f(c) - \theta < f(x) < f(c) + \theta < y$$
Portanto $f(x) < y$ para $x > c$, o que é impossível por c ser o supremo de A.

(ii) $f(c) > y$ – Então para $\theta > 0$ tal que $f(c) - \theta > y$, vem
$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow y < f(c) - \theta < f(x) < f(c) + \theta$$
Portanto $f(x) > y$ para $x < c$ o que é impossível por c ser o supremo de A. □

Teorema de Weierstrass: *Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então tem nesse intervalo um máximo e um mínimo.*

Demonstração:

(i) Provemos primeiramente que f é limitada em $[a, b]$, isto é,
$$\exists_{m\in\mathbb{R}}\ \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in[a,b]}\ m \leq f(x) \leq M$$
Iremos apenas mostrar a segunda desigualdade, pois a primeira é semelhante. Para isso usaremos o método de redução ao absurdo. Suponhamos que
$$\forall_{M>0}\ \exists_{d\in[a,b]}\ f(d) > M$$
e seja $\theta = f(d) - M > 0$. Como f é contínua em $[a, b]$, para esse $\theta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$|x - d| < \delta \wedge x \neq d \Rightarrow f(d) - \theta < f(x) < f(d) + \theta$$
Donde
$$\forall_{M>0}\ \exists_{\delta>0}\ \left[|x - d| < \delta \wedge x \neq d \Rightarrow f(x) > M\right]$$
e
$$\lim_{x\to d} f(x) = +\infty$$
o que é impossível por f ser contínua em d.

(ii) Como f é limitada em $[a, b]$, então existem
$$S = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ I = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$
Para provar que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$ temos que provar que existem $x_1 \in [a, b]$ e $x_2 \in [a, b]$ tais que
$$f(x_1) = S,\ f(x_2) = I$$
Mostremos apenas a primeira igualdade, pois a outra é semelhante. Da definição de Supremo de f em $[a, b]$ tem-se
$$\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) \leq S$$

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{y\in[a,b]}\ f(y) > S - \delta$$

Se não existir $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = S$, então $f(x) < S$ para todo $x \in [a,b]$ e a função

$$g : x \longmapsto \frac{1}{S - f(x)}$$

é contínua em $[a,b]$. Além disso para qualquer $\delta > 0$, existe sempre um $y \in [a,b]$ tal que

$$g(y) = \frac{1}{S - f(y)} > \frac{1}{\delta}$$

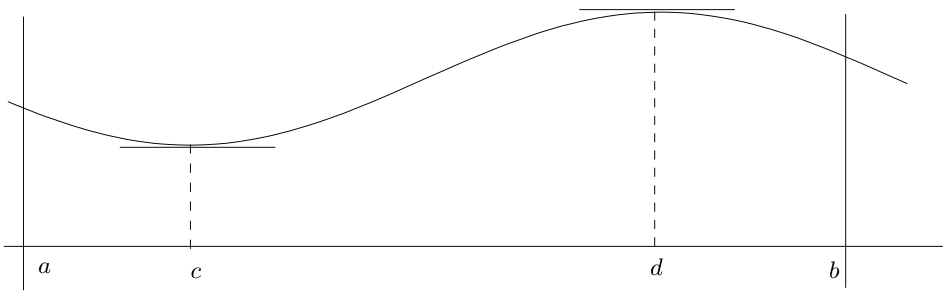
Donde g não é limitada em $[a,b]$, o que é impossível por g ser contínua nesse intervalo.

$\square$

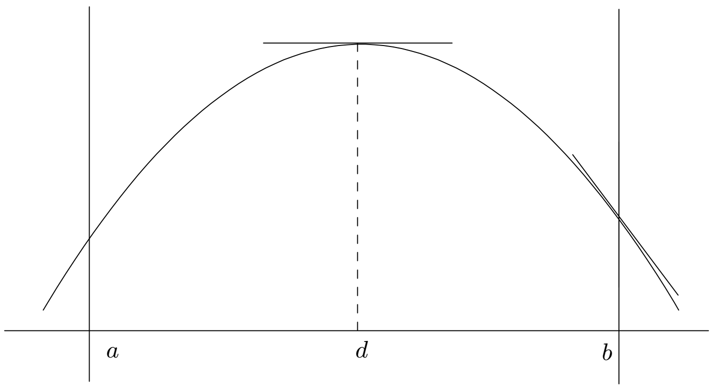
É evidente do ponto de vista geométrico que se f é uma função contínua e derivável em $[a,b]$, então

$$f \text{ tem máximo (mínimo) em } x_0 \in]a,b[\Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

mas o resultado não é necessariamente verdadeiro para a e b.



$\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(d)$ e $f'(d) = f'(c) = 0$, pois as rectas tangentes ao gráfico de f em $P(c, f(c))$ e $P(d, f(d))$ são paralelas a $X'X$.



$\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(d)$ mas $f'(a) \neq 0$, pois a recta tangente à curva em $P(a, f(a))$ não é paralela a $X'X$.

Teorema 1 *Se f é definida num intervalo I, é derivável num ponto interior x_0 desse intervalo e tem um máximo ou um mínimo em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que f tem máximo em $x_0 \in]a, b[$. Então

$$f(x) \leq f(x_0)$$

para todo $x \in [a, b]$. Por outro lado, como f é derivável em x_0, então

$$f'(x_0) = f'_e(x_0) = f'_d(x_0)$$

Mas

$$\begin{aligned} f'_d(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ f'_e(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{aligned}$$

por estes limites existirem e $x > x_0$ ($x < x_0$) quando x tende para x_0 à direita (à esquerda). Donde

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ e } f'(x_0) \leq 0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

$\square$

Se o domínio de uma função contínua é um intervalo I não fechado, então f pode não atingir um mínimo ou um máximo nesse intervalo. Contudo é possível demonstrar a existência de limites nos extremos desse intervalo se a função f for monótona.

Teorema 2 *Se f é monótona no intervalo $]a, b[$, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) \ e \ \lim_{x \to b} f(x)$$

existem (limites laterais se a e b são números reais).

Demonstração: Iremos apenas provar o caso de $b \in \mathbb{R}$ e f ser crescente em $]a, b[$, estabelecendo as seguintes propriedades:

(i) Se $\sup_{x \in]a,b[} f(x)$ não existe, então $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Se $\sup_{x \in]a,b[} f(x) = S \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \to b^-} f(x) = S^-$.

Para estabelecer a condição (i), suponhamos que

$$\sup_{x \in]a,b[} f(x)$$

não existe, ou seja, que

$$\forall_{\theta > 0} \ \exists_{y \in]a,b[} \ f(y) > \theta$$

Mas se $y \in]a,b[$, então existe $\delta > 0$ tal que $y = b - \delta$. Como f é crescente em $]a,b[$ tem-se

$$b - \delta < x < b \Longrightarrow f(y) < f(x)$$

Donde

$$\forall_{\theta>0}\ \exists_{\delta>0}\ [b - \delta < x < b \Longrightarrow f(x) > \theta]$$

e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
(ii) Suponhamos agora que

$$S = \sup_{x\in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

Então $f(x) \leq S$ para qualquer $x \in]a,b[$. Por outro lado, para qualquer $\theta > 0$, existe $y \in]a,b[$ tal que $f(y) > S - \theta$. Se $\delta > 0$ satisfaz $y = b - \delta$ então, por f ser crescente, vem

$$b - \delta < x < b \Longrightarrow f(x) > f(y) > S - \theta$$

Donde

$$\forall_{\theta>0}\ \exists_{\delta>0}\ [b - \delta < x < b \Longrightarrow S - \theta < f(x) \leq S]$$

e

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = S^-$$

$\square$

De modo semelhante se estabeleciam as seguintes propriedades:

(i) f crescente em $]a,b[\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = I^+$ ou $-\infty$ com

$$I = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$$

(ii) f decrescente em $]a,b[\Longrightarrow \lim\limits_{x\to b} f(x) = I^+$ ou $-\infty$

(iii) f decrescente em $]a,b[\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = S^-$ ou $+\infty$

Teorema 3 *Se f é contínua num intervalo I, então f é injectiva em I se e só se é crescente ou decrescente em I.*

Demonstração: Suponhamos que f não é crescente nem decrescente em I. Então existem x_1, x_2 e x_3 em I tais que

$$x_1 < x_2 < x_3,\ f(x_1) \geq f(x_2),\ f(x_3) \geq f(x_2)$$

Seja y tal que

$$f(x_2) \leq y \leq \min\{f(x_1), f(x_3)\}$$

Como f é contínua em $[x_1, x_2]$, então, pelo Teorema dos Valores Intermédios,

$$\exists_{x_0\in]x_1,x_2[}\ y = f(x_0)$$

Do mesmo modo, como f é contínua em $[x_2, x_3]$, então

$$\exists_{x_0' \in]x_2, x_3[} \; y = f(x_0')$$

Portanto $x_0' \neq x_0$ satisfazem $f(x_0) = f(x_0')$, o que é impossível, por f ser injectiva.

Para provar a implicação inversa, seja f uma função crescente ou decrescente em I. Se $x \neq x'$ então $x < x'$ ou $x > x'$. Mas f é crescente ou decrescente em I e por isso $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$. Portanto $f(x) \neq f(x')$ e f é injectiva em I. □

Teorema 4 *Se f é contínua e injectiva num intervalo I, então*

(i) f crescente em $I \Longrightarrow f^{-1}$ é crescente em I.

(ii) f decrescente em $I \Longrightarrow f^{-1}$ é decrescente em I.

Demonstração: Da definição de função inversa tem-se

$$\begin{array}{rcl} y_1 = f(x_1) & \Longleftrightarrow & x_1 = f^{-1}(y_1) \\ y_2 = f(x_2) & \Longleftrightarrow & x_2 = f^{-1}(y_2) \end{array}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$ e $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$. Então

$$\begin{array}{rcl} f \text{ crescente em } I & \Longleftrightarrow & \forall_{x_1 \neq x_2} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \\[2ex] & \Longleftrightarrow & \forall_{y_1 \neq y_2} \dfrac{y_2 - y_1}{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)} > 0 \\[2ex] & \Longleftrightarrow & \forall_{y_1 \neq y_2} \dfrac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} > 0 \\[2ex] & \Longleftrightarrow & f^{-1} \text{ crescente em } D_{f^{-1}} \end{array}$$

□

Teorema 5 *Se f é contínua e injectiva num intervalo I, então f^{-1} é contínua no seu domínio.*

Demonstração: Se f é contínua e injectiva em I, então, pelo teorema 3, f é crescente ou decrescente em I. Suponhamos que f é crescente em I. Então, pelo teorema 4, o mesmo acontece com f^{-1}. Para estabelecer que f^{-1} é contínua no seu domínio, seja $y_0 \in D_{f^{-1}}$ qualquer e provemos que

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

ou seja, que para qualquer $\theta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \wedge y \neq y_0 \Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \theta < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \theta$$

Sejam θ um número real positivo qualquer e x, x_0 tais que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y = f(x) & \Longleftrightarrow & x = f^{-1}(y) \\ y_0 = f(x_0) & \Longleftrightarrow & x_0 = f^{-1}(y_0) \end{array} \right.$$

Então
$$f^{-1}(y_0) - \theta < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \theta \Longleftrightarrow x_0 - \theta < x < x_0 + \theta$$
Mas, como f e f^{-1} são crescentes nos seus domínios, então
$$\begin{array}{lclcl} x_0 - \theta < x_0 & \Longleftrightarrow & f(x_0 - \theta) < f(x_0) & \Longleftrightarrow & y_1 < y_0 \\ x_0 < x_0 + \theta & \Longleftrightarrow & f(x_0) < f(x_0 + \theta) & \Longleftrightarrow & y_0 < y_2 \end{array}$$
com
$$y_1 = f(x_0 - \theta), \; y_2 = f(x_0 + \theta)$$
Sejam
$$y_1 = y_0 - \delta_1, \; y_2 = y_0 + \delta_2$$
com $\delta_1, \delta_2 > 0$. Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então
$$\begin{array}{rcl} y_0 - \delta < y < y_0 + \delta & \Longrightarrow & x_0 - \theta < x < x_0 + \theta \\ & \Longrightarrow & f^{-1}(y_0) - \theta < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \theta \end{array}$$
Donde f^{-1} é contínua em y_0. □

10 Limites e Continuidade das Funções Elementares

Nesta secção iremos começar por mostrar que todas as funções elementares são contínuas nos seus domínios.

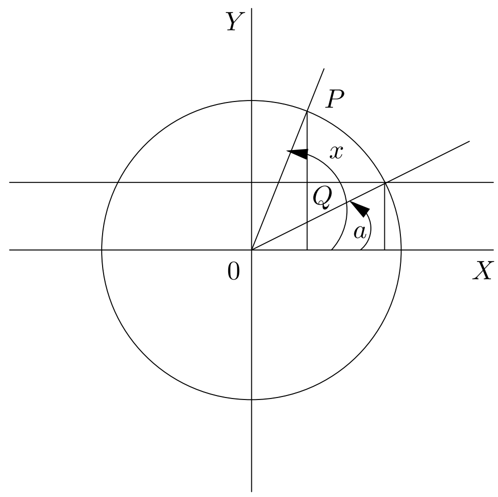
(i) Funções Potência e Raíz

Para todo $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$
pela regra do produto do limite de funções. Então a função potência de expoente natural é contínua em $\mathbb{R}$. A função raíz é contínua no seu domínio, por ser a inversa de uma função contínua num intervalo. Portanto
$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$
sendo $a \geq 0$ no caso de n par.

(ii) Função Módulo

Para todo $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to a} |x| = |a|$$
Com efeito se θ é um número real positivo qualquer, então existe $\delta = \theta$ tal que
$$|x - a| < \delta \Longrightarrow ||x| - |a|| \leq |x - a| < \theta$$
Então a função módulo é contínua em $\mathbb{R}$.

(iii) Funções Circulares



Provemos que a função seno é contínua para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Da figura tem-se

$$|\sin x - \sin a| = |PQ| < |x - a|$$

e portanto para qualquer $\theta > 0$, existe $\delta = \theta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \wedge x \neq a \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \theta$$

Donde

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$$

A demonstração para a função cosseno é semelhante. Além disso a função tangente é contínua no seu domínio, pois é o quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ e o denominador é não nulo. Finalmente as funções circulares inversas são todas contínuas nos seus domínios devido ao teorema 5.

(iv) Funções Exponencial e Logaritmo

Provemos que a função exponencial é contínua para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Para $x > a$ tem-se $e^{x-a} > 1$ e

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1| = e^a(e^{x-a} - 1)$$

Mas,

$$\begin{aligned} e^{x-a} - 1 < \frac{\theta}{e^a} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{x-a} < 1 + \frac{\theta}{e^a} \\ &\Leftrightarrow \quad x - a < \log\left(1 + \frac{\theta}{e^a}\right) \end{aligned}$$

Portanto para qualquer $\theta > 0$, existe

$$\delta = \log\left(1 + \frac{\theta}{e^a}\right) > 0$$

tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |e^x - e^a| < \theta$$

o que estabelece

$$\lim_{x \to a^+} e^x = e^a$$

Para mostrar que o outro limite lateral é também igual a e^a, tem-se

$$\lim_{x \to a^-} e^x = \lim_{x \to a^-} \left(e^{-x}\right)^{-1} = \lim_{x \to a^-} \frac{1}{e^{-x}}$$

Seja $y = -x$. Então

$$\lim_{x \to a^-} e^x = \lim_{y \to -a^+} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{-a}} = e^a$$

Como os limites laterais são iguais, então

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a$$

e a função exponencial é contínua no seu domínio.

Devido ao teorema 5, a função

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[\; &\longrightarrow \; \mathbb{R} \\ x \; &\longmapsto \; \log x \end{aligned}$$

é contínua no seu domínio. Mas para qualquer base $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ tem-se

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

e portanto a função logaritmo de uma base $a \neq e$ é também contínua em $]0, +\infty[$. Pelo teorema 5, a função exponencial de base $a \neq e$ é também contínua em $\mathbb{R}$.

(v) Funções Hiperbólicas

Para estabelecer a continuidade das funções hiperbólicas directas basta notar que

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

e que a função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$. As funções hiperbólicas inversas são contínuas nos seus domínios, devido ao Teorema 5.

(vi) Limites das Funções Elementares nos Pontos Extremos dos domínios

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} x^k &= +\infty \text{ } (k \text{ par}) \\ \lim_{x \to -\infty} x^k &= -\infty, \lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty \text{ } (k \text{ ímpar}) \end{aligned}}$$

São consequências da regra do produto de limites de funções.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[k]{x} &= +\infty \ (k \text{ par}) \\
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[k]{x} &= +\infty, \lim_{x\to-\infty} \sqrt[k]{x} = -\infty \ (k \text{ ímpar})
\end{aligned}$$

Para provar os dois primeiros resultados, seja $\theta > 0$ qualquer e determinemos $\delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Longrightarrow \sqrt[k]{x} > \theta$$

Como

$$\sqrt[k]{x} > \theta \Longleftrightarrow x > \theta^k$$

então $\delta = \theta^k > 0$.

Para mostrar a última igualdade, tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[k]{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt[k]{-x} = -\lim_{y\to+\infty} \sqrt[k]{y} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$$

São consequências da definição de módulo de um número real.

$$\begin{aligned}
a > 1 &\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+, \ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\
0 < a < 1 &\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+
\end{aligned}$$

Consideremos que $a > 1$ e provemos primeiramente que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

Para isso, seja $\theta > 0$ qualquer e determinemos $\delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Longrightarrow a^x > 1 + \theta$$

Como

$$a^x > 1 + \theta \Longleftrightarrow x > \log_a(1+\theta) > 0$$

então $\delta = \log_a(1+\theta)$ verifica a implicação e estabelece o resultado pretendido. Para provar o segundo limite, tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = 0^+$$

Se $0 < a < 1$, tem-se $\frac{1}{a} > 1$ e portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} a^x &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{y} = +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} a^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{y} = 0^+
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
a > 1 &\implies \lim_{x\to 0^+}\log_a x = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty \\
0 < a < 1 &\implies \lim_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\log_a x = -\infty
\end{aligned}}$$

Começamos por provar que

$$\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty \tag{2}$$

ou seja, que

$$\forall_{\theta>0}\,\exists_{\delta>0}\ [x > \delta \Longrightarrow \log x > \theta]$$

Como

$$\log x > \theta \Longleftrightarrow x > e^\theta$$

então $\delta = e^\theta$ torna a implicação verdadeira.

Agora tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\log x &= \lim_{x\to 0^+}\log\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = -\lim_{x\to 0^+}\log\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\lim_{y\to+\infty}\log y = -\infty
\end{aligned} \tag{3}$$

As fórmulas anteriores são agora obtidas a partir de (2), (3), de

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

e do facto de

$$\begin{aligned}
a > 1 &\implies \log a > 0 \\
0 < a < 1 &\implies \log a < 0
\end{aligned}$$

As funções circulares directas não têm limites quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$. Além disso tem-se

$$\boxed{\begin{aligned}
\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} x &= +\infty \\
\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg} x &= -\infty
\end{aligned}}$$

pois

$$\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+ \text{ e } \lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0^-$$

As funções arco seno e arco co-seno são definidas e contínuas em intervalos fechados. Em relação à função arco tangente, tem-se

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{2}^- \\ \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x &= -\frac{\pi}{2}^+ \end{aligned}}$$

Para demonstrar a primeira propriedade tem de se provar que

$$\forall_{\theta>0}\ \exists_{\delta>0}\ \left[x > \delta \Longrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\right]$$

Como

$$\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \theta \Longleftrightarrow x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

então

$$\delta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

torna a implicação verdadeira.

Para provar o segundo resultado, tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(-x) = -\lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}^+$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty, &\qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty, &\qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1, &\qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1 \end{aligned}}$$

De acordo com as definições dessas funções, tem-se

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1 \\
\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x &= -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(-x) = -\lim_{y\to+\infty} \operatorname{th} y = -1
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch} x = +\infty & \\
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x = +\infty, & \lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh} x = -\infty \\
\lim_{x\to1^-} \operatorname{argth} x = +\infty, & \lim_{x\to-1^+} \operatorname{argth} x = -\infty
\end{array}
}
$$

Usando as fórmulas que relacionam essa funções com os logaritmos, tem-se

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch} x &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x &= \lim_{x\to+\infty} \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh} x &= -\lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh}(-x) = -\lim_{y\to+\infty} \operatorname{argsh} y = -\infty \\
\lim_{x\to1^-} \operatorname{argth} x &= \lim_{x\to1^-} \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = +\infty \\
\lim_{x\to-1^+} \operatorname{argth} x &= \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty
\end{aligned}
$$

Notemos ainda que para calcular

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

transformamos essa função numa exponencial a partir da definição de logaritmo:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\log[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$$

Usando esta fórmula e a propriedade do limite da composição de funções torna-se fácil o cálculo deste tipo de limites. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{argsh} x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\operatorname{argsh} x \cdot \log(\operatorname{sh} x)} = +\infty$$

pois

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x \cdot \log(\operatorname{sh} x) = +\infty$$

e

$$\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

11 Funções Deriváveis e Diferenciáveis

f é uma função Derivável em x_0 se e só se a derivada de f em x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe (isto é, se o limite existe). Se esse limite é um número real, então f diz-se Diferenciável em x_0. Assim por exemplo a função

$$f : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$$

é derivável em $x=0$ e $x=1$, pois

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty \\
f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{1}}{x-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^3-1} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y^2+y+1)(y-1)} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

mas não é diferenciável em 0.

Uma função diferenciável em x_0 é contínua em x_0 mas o resultado não é necessariamente verdadeiro para uma função apenas derivável em x_0.

Fórmulas das Derivadas das Funções Hiperbólicas (Tabela 3)

Tal como no caso dos limites dessas funções, as fórmulas das derivadas são obtidas a partir das correspondentes fórmulas das funções exponencial e logaritmo e das operações com derivadas. A título de exemplo, provemos que

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \text{ e } (\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito tem-se

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sh} x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}(-1)\right] = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{argsh} x)' &= \left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1+\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\dfrac{x+\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

Dessas duas igualdades e da fórmula da derivada da função composta, tem-se

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sh} f(x))' &= \operatorname{ch} f(x)\cdot f'(x) \\
(\operatorname{argsh} f(x))' &= \frac{1}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}
\end{aligned}
$$

que são duas das fórmulas apresentadas na Tabela 3.

12 Propriedades das Primitivas

Propriedade 13

(i) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$

(ii) $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

com f e g funções contínuas num intervalo I e $\lambda\in\mathbb{R}$.

Demonstração: Provemos apenas (ii), pois (i) é semelhante. Para estabelecer (ii) basta provar que

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = f(x)\pm g(x)$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' &= \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' \\
&= f(x)\pm g(x)
\end{aligned}
$$

□

Propriedade 14 *Se f é contínua e g é continuamente derivável num intervalo I, então*

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx + C$$

com

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Demonstração: Basta estabelecer que para todo $x \in I$,

$$\left(F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\right)' = f(x)g(x)$$

Mas

$$\begin{aligned}\left(F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\right)' &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) \\ &= F'(x)g(x) = f(x)g(x)\end{aligned}$$

□

Propriedade 15 *Se f é contínua num intervalo I e φ é uma função injectiva e continuamente derivável num intervalo I tal que $CD_\varphi \subseteq I$, então*

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

Demonstração: Como φ é injectiva e continuamente derivável em I e $\mathrm{CD}_\varphi \subseteq I$ então:

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

é um número real. Seja

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F(t) + C$$

Como φ é injectiva em I, tem-se

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Para provar o teorema basta mostrar que

$$\forall\ x \in I:\ \left(F(\varphi^{-1}(x)) + C\right)' = f(x)$$

Mas:

$$\begin{aligned}\left(F(\varphi^{-1}(x)) + C\right)' &= F'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= f(\varphi(t)) = f(x)\end{aligned}$$

e isso demonstra o teorema. □

13 Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

(i) Definição e Existência de Solução

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que contém como incógnitas as variáveis independente x e dependente y e algumas derivadas $y', \ldots, y^{(n)}$, para $n \geq 1$. A resolução de uma EDO consiste em encontrar uma Solução Particular $y = f(x)$ que a satisfaça ou a Expressão Geral das suas soluções.

Como exemplo, consideremos a EDO

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad (1)$$

e suponhamos que a pretendemos resolver para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $y = \frac{1}{2}x^2$, então

$$\frac{dy}{dx} = x$$

e portanto $y = \frac{1}{2}x^2$ é uma Solução Particular da equação dada. A expressão geral é obtida por primitivação e tem-se

$$y = \int x dx + C \Longrightarrow y = \frac{x^2}{2} + C$$

com C uma constante.

A Ordem de uma Equação Diferencial Ordinária é a ordem mais elevada das derivadas existentes na equação. Assim, por exemplo, a equação (1) é de 1ª ordem, enquanto que a equação

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x \cos y = 0$$

é de 3ª ordem.

Toda a equação de 1ª ordem pode escrever-se na forma

$$y' = f(x, y)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

com f uma função contínua num subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Neste curso iremos apenas tratar este tipo de equações.

Uma Equação Diferencial Ordinária de 1ª Ordem diz-se Linear se tiver a forma

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x) \qquad (3)$$

com a, b, c funções contínuas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

O seguinte problema é normalmente considerado na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem e será discutido neste curso.

Problema da EDO de 1ª Ordem com Valores Iniciais

Determinar uma solução particular $y = g(x)$ da EDO

$$y' = f(x, y), \ x \in I, \ y(a) = c$$

com $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$ dados.

Para este problema possível estabelecer o seguinte resultado de existência e unicidade de uma solução (ver R. Burden, J. Faires e A. Reynolds, Numerical Analysis, Capítulo 5):

Teorema 6 *Seja* $D = \{(x,y): \ a \leq x \leq b, \ y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *e* f *uma função contínua em* D. *Se* f *é Lipschitz contínua em* D *na variável* y, *isto é, satisfaz*

$$\exists_{L>0} \ \forall_{(x,y_1)} \ \forall_{(x,y_2)} \ \ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

então o Problema de EDO de 1ª Ordem com Valores Iniciais tem uma e uma só solução $y = g(x)$, *de domínio* $[a,b]$.

A demonstração deste teorema necessita de teoria das funções de duas variáveis e portanto não pode ser apresentada neste curso.

Como referimos anteriormente, um dos objectivos da resolução de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem consiste em determinar a expressão geral das funções $y = g(x)$ que satisfazem a equação. Se tal for possível, então a solução do Problema de EDO com Condições Iniciais é fácil de obter determinando a constante C da condição inicial. Nas próximas secções iremos apresentar alguns casos em que esse objectivo é conseguido. Outras EDOs de 1ª ordem necessitam da análise matemática das funções de duas variáveis para esse efeito e não serão por isso estudadas. É importante acrescentar que todos estes casos são muito especiais, pelo que em geral apenas é possível obter uma solução aproximada do Problema EDO com condições iniciais usando um método numérico.

(ii) Equações de 1ª Ordem de Variáveis Separadas

São equações diferenciais onde as variáveis x e y estão separadas em duas funções $g(x)$ e $h(y)$, isto é,

$$f(x,y) = g(x)h(y) \tag{4}$$

ou se podem transformar nessa forma por simples manipulações. Se tal acontecer, então tem-se

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Longrightarrow \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Mas

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{h(y)}dy\right) = \frac{d}{dy}\left(\int \frac{1}{h(y)}dy\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(\int g(x)dx\right) = g(x)$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Se

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{h(y)}dy &= H(y) + C \\ \int g(x)dx &= G(x) + C \end{aligned}$$

então a expressão geral da solução da EDO é

$$H(y) = G(x) + C$$

Exemplos

(i) Consideremos a EDO

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

Então

$$\int dy = \int e^{-x} dx$$

e portanto

$$y = -e^{-x} + C$$

representa a expressão geral das soluções da EDO dada.

(ii) Consideremos agora a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$$

Então

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

e portanto

$$\log|y| = \operatorname{argsh} x + C \iff |y| = e^{\operatorname{argsh} x} + C$$

representa a expressão geral das soluções da EDO.

(iii) Equações Lineares de 1ª Ordem

De acordo com a definição (3), se $a(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x) \tag{5}$$

com p e r funções contínuas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Dois casos devem ser considerados e são discutidos a seguir.

Caso 1: p é a função nula. A EDO reduz-se a uma equação de variáveis separadas.

Caso 2: $p(x)$ não é identicamente nula em I. Como p é uma função contínua em I, então é primitivável nesse intervalo. Seja

$$\int p(x)dx = Q(x) + C \tag{6}$$

Então

$$e^{Q(x)}\frac{dy}{dx} + e^{Q(x)}p(x)y = e^{Q(x)}r(x)$$

Mas

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{Q(x)}\right) = \frac{dy}{dx}e^{Q(x)} + ye^{Q(x)}p(x)$$

e portanto

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{Q(x)}\right) = e^{Q(x)}r(x)$$

para todo $x \in I$. Portanto
$$ye^{Q(x)} = \int e^{Q(x)} r(x)dx$$
Como a função
$$g : x \longrightarrow e^{Q(x)} r(x)$$
é contínua em I, então
$$\int e^{Q(x)} r(x)dx = S(x) + C \tag{7}$$
portanto
$$ye^{Q(x)} = S(x) + C \tag{8}$$
representa a expressão geral das soluções da EDO. Assim, uma equação linear de 1ª ordem é resolvida a partir da aplicação sucessiva das fórmulas (6), (7) e (8).

Exemplo: Determinar a solução particular da EDO
$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = \cos x$$
que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{2}) = 2$.

De (6), vem
$$\int \cos x dx = \sin x + C \Longrightarrow Q(x) = \sin x.$$
Mas de (7) tem-se
$$\int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + C$$
Então, por (8),
$$ye^{\sin x} = e^{\sin x} + C$$
e
$$y = 1 + Ce^{-\sin x}$$
é a expressão geral das soluções da equação dada. Para calcular a solução particular pedida, substitua-se na expressão geral $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = 2$ para obter a constante C. Mas
$$2 = 1 + Ce^{-1}$$
Donde $C = e$ e
$$y = 1 + e^{1-\sin x}$$
é a solução pedida.

Existem também alguns casos de EDOs de 1ª Ordem que não são lineares nem de variáveis separadas, mas que se podem transformar, por mudanças de variáveis, num dos dois primeiros tipos. A título de exemplo, discutimos essas transformações para a conhecida Equação de Bernoulli
$$\frac{dh(y)}{dy}\frac{dy}{dx} + p(x)h(y) = q(x)$$

Fazendo a mudança de variável $z = h(y)$, tem-se

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dh(y)}{dy}\frac{dy}{dx}$$

e portanto a equação reduz-se à EDO linear de 1ª ordem

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

Exemplo: Consideremos a EDO

$$\operatorname{ch} y \frac{dy}{dx} + \operatorname{sh} y = x \tag{9}$$

Seja $z = \operatorname{sh} y$. Então

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \operatorname{ch} y \frac{dy}{dx}$$

e a equação transforma-se em

$$\frac{dz}{dx} + z = x \tag{10}$$

Como $\displaystyle\int dx = x + C$ então $Q(x) = x$. Mas $\displaystyle\int e^x x dx = e^x(x-1) + C$ e portanto

$$e^x z = e^x(x-1) + C$$

representa a expressão geral das soluções da equação (10). Substituindo z pelo seu valor $\operatorname{sh} y$ obtém-se a expressão geral das soluções da EDO (9):

$$e^x \operatorname{sh} y = e^x(x-1) + C$$

A resolução de outras equações através de mudanças de variáveis será tratada nas aulas práticas.

14 Teoremas das Funções Regulares

Uma função é Regular em $[a, b]$ se é contínua nesse intervalo e derivável pelo menos no seu interior $]a, b[$. Notar que toda a função diferenciável em $[a, b]$ é regular em $[a, b]$.

Teorema de Rolle: *Se f é regular em $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Se f é regular em $[a, b]$, então é contínua em $[a, b]$ e pelo teorema de Weierstrass tem um máximo e um mínimo nesse intervalo. Como $f(a) = f(b)$, então há dois possíveis casos:

(i) f é constante em $[a, b]$, isto é, $f(x) = f(a) = f(b)$ para todo $x \in]a, b[$. Então $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$ e o teorema fica demonstrado.

(ii) Existe pelo menos um $x \in]a, b[$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Então f tem um máximo ou mínimo num ponto $c \in]a, b[$. Como f é derivável em $[a, b]$, então $f'(c)$ existe. Pelo teorema 1, $f'(c) = 0$ e isso demonstra o teorema neste caso.

$\square$

Teorema de Lagrange: *Se f é regular em $[a, b]$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que*

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(b) - f(a) - \lambda(b - a) = 0$$

e provemos que

$$\exists_{c \in]a,b[}\ f'(c) = \lambda$$

Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} g : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \lambda x \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= f(b) - \lambda b - (f(a) - \lambda a) \\ &= f(b) - f(a) - \lambda(b - a) = 0 \end{aligned}$$

Além disso g é regular em $[a, b]$, pois g é contínua em $[a, b]$ e derivável pelo menos em $]a, b[$ por f ser regular em $[a, b]$. Então, pelo teorema de Rolle,

$$\exists_{c \in]a,b[}\ g'(c) = 0$$

Mas

$$g'(c) = f'(c) - \lambda$$

e isso demonstra o teorema. $\square$

Notar que o teorema também é verdadeiro para $a > b$ e portanto podemos escrever para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\exists_{c \in \mathrm{Int}(I)}\ f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$$

onde $\mathrm{Int}(I)$ é o interior do intervalo fechado I de extremos a e x em que f é regular. Esta igualdade é conhecida como Fórmula dos Acréscimos Finitos.

Aplicações da Fórmula dos Acréscimos Finitos

(i) Estudo da Monotonia de uma Função Regular

Teorema 7 *Se f é regular em $[a, b]$, então*

(i) $\forall_{x \in]a,b[}\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ *é crescente em* $[a, b]$

(ii) $\forall_{x \in]a,b[}\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ *é decrescente em* $[a, b]$

Demonstração:

(i) Sejam x_1 e x_2 números reais de $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$ e provemos que $f(x_1) < f(x_2)$. Como f é regular em $[x_1, x_2]$, então pela Fórmula dos Acréscimos Finitos,

$$\exists_{x_0 \in]x_1, x_2[}\ f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) > 0$$

e isso demonstra o resultado. A demonstração de (ii) é semelhante. $\square$

Notas

(i) f pode ser crescente ou decrescente num intervalo I e a sua derivada ser nula em pelo menos um $x_0 \in I$. Assim por exemplo consideremos a função

$$f : x \mapsto x^3$$

Então f é contínua em $\mathbb{R}$. Além disso

$$f'(x) = 3x^2$$

para $x \neq 0$. Donde f é regular e crescente em $]-\infty, 0]$ e em $[0, +\infty[$ e portanto é crescente em $\mathbb{R}$. No entanto $f'(0) = 0$.

(ii) Para uma função regular num intervalo fechado, basta saber o sinal da derivada no seu interior para poder concluir a monotonia dessa função. Assim por exemplo,

$$f : x \mapsto \arcsin x$$

é regular em $[-1, 1]$ e

$$\forall_{x \in]-1,1[} \; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0$$

Portanto podemos concluir que a função arco seno é crescente em $[-1, 1]$ sem necessidade de calcular a derivada de f nos pontos fronteiros.

(ii) Expressão Geral da Primitiva de uma Função Contínua num Intervalo

Teorema 8

(i) Se h é uma função regular em $[a, b]$, então

$$\forall_{x \in]a,b[} \; h'(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall_{x \in [a,b]} h(x) = C$$

onde C é uma constante.

(ii) Se f e g são funções regulares em $[a, b]$, então

$$\forall_{x \in]a,b[} \; f'(x) = g'(x) \Longleftrightarrow \forall_{x \in [a,b]} f(x) = g(x) + C$$

onde C é uma constante.

Demonstração:

(i) Para qualquer $x \in]a, b]$, tem-se

$$\exists_{c \in]a,x[} \; h(x) = h(a) + h'(c)(x - a) = h(a)$$

e portanto h é constante em $[a, b]$. Por outro lado, se h é constante em $[a, b]$, então a sua derivada é nula para todo $x \in]a, b[$.

(ii) É consequência de (i), usando a função h definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$\square$

Seja agora f uma função contínua num intervalo I. Portanto f admite uma primitiva F tal que

$$\forall_{x \in I} \; F'(x) = f(x)$$

Se G é uma outra primitiva de f em I, então

$$\forall_{x \in I} \; G'(x) = f(x)$$

Portanto pelo teorema anterior G difere de F por uma constante e daí podermos escrever a expressão geral das primitivas de f em I na forma

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

com C uma constante.

(iii) Demonstração de Igualdades

Consideremos uma igualdade da forma

$$\forall_{x \in I} \; f(x) = \alpha$$

com f uma função regular num intervalo I e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\mathrm{Int}(I)$ é o interior do intervalo I e provarmos que

$$\forall_{x \in \mathrm{Int}(I)} \; f'(x) = 0$$

então pelo teorema anterior

$$\forall_{x \in I} \; f(x) = C$$

e basta provar que $C = \alpha$ escolhendo um determinado $\overline{x} \in I$ e mostrando que $f(\overline{x}) = \alpha$. A título de exemplo, provemos que

$$\forall_{x \in [-1,1]} \; \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos x + \arcsin x \end{array}$$

Então f é contínua em $[-1,1]$ e

$$\forall_{x \in]-1,1[} \; f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Portanto f é regular em $[-1,1]$ e a sua derivada é nula em $]-1,1[$. Então

$$\forall_{x \in [-1,1]} \; f(x) = C$$

Para $\overline{x} = 0$, tem-se

$$f(\overline{x}) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

e a igualdade é verdadeira.

Fórmula de Taylor e Aplicações

Seja agora f uma função diferenciável em $[a,b]$. Então a derivada de f é um número real para todo $x \in [a,b]$ e portanto podemos considerar a função derivada

$$\begin{array}{rcl} f' : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Teorema de Taylor ($n = 1$): *Se f' é regular em $[a,b]$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2}\lambda = 0$$

e provemos que existe um $c \in]a,b[$ tal que

$$f''(c) = \lambda$$

Para isso consideremos a função:

$$\begin{array}{rcl} g : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \dfrac{(x-a)^2}{2}\lambda \end{array}$$

Então g é contínua em $[a,b]$ e para qualquer $x \in [a,b]$

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - (x-a)\lambda$$

é um número real por f ser diferenciável nesse intervalo. Portanto g é regular em $[a,b]$. Além disso

$$g(a) = g(b) = 0$$

pela definição de λ. Por isso, pelo Teorema de Rolle, existe $d \in]a,b[$ tal que

$$g'(d) = 0$$

Como f' é uma função regular em $[a,b]$, então também o é em $[a,d]$ e o mesmo acontece à função g'. Além disso $g'(a) = g'(d) = 0$, o que implica que existe um $c \in]a,d[$ tal que

$$g''(c) = 0$$

Mas

$$g''(c) = f''(c) - \lambda$$

e isso demonstra o teorema. □

É agora fácil de provar usando o mesmo tipo de raciocínio o seguinte resultado:

Teorema de Taylor: *Se $f^{(n)}$ é uma função regular em $[a,b]$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Notar que f tem de ser n vezes diferenciável em $[a,b]$ para que a função $f^{(n)}$ exista. Este teorema também é válido para $a > b$. Portanto podemos escrever,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

desde que f seja n vezes diferenciável num intervalo de extremos a e x, e $f^{(n)}$ seja regular nesse intervalo. Além disso c é um número real desconhecido pertencente ao interior do intervalo I de extremos a e x. Esta igualdade é conhecida por Fórmula de Taylor e permite aproximar uma função f por um polinómio de grau n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

(onde assumimos que $f^{(0)}(a) = f(a)$). O erro que se comete nessa aproximação é

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

e pode ser muito pequeno para n grande. Como c não é conhecido, não podemos saber exactamente qual é o erro cometido. No entanto, em muitos casos podemos calcular um majorante para esse erro. A título de exemplo consideremos a função exponencial

$$f : x \longmapsto e^x$$

Então é fácil de ver que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Fazendo $a = 0$ na Fórmula de Taylor tem-se

$$\forall_{x \in \mathbb{R}}\ e^x \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

e portanto e pode ser aproximado por

$$e \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

O erro cometido por essa aproximação é $\frac{e^c}{(n+1)!}$. Mas $0 < c < 1$ e portanto

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

o que é manifestamente pequeno mesmo para n pequeno. Assim por exemplo fazendo $n = 8$, tem-se

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320}$$

que dá um valor aproximado de e com um erro inferior a

$$\frac{3}{362880} \simeq 8 \times 10^{-6}$$

A Fórmula de Taylor permite também estabelecer algumas desigualdades interessantes. Assim por exemplo, provemos que

$$\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

As derivadas da função $f : x \longmapsto \operatorname{ch} x$ são dadas por

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{ch} x)' & = & \operatorname{sh} x \\ (\operatorname{ch} x)'' & = & \operatorname{ch} x \\ (\operatorname{ch} x)^{(3)} & = & \operatorname{sh} x \\ (\operatorname{ch} x)^{(4)} & = & \operatorname{ch} x \\ & \vdots & \end{array}$$

Então $f^{(4)}$ é regular em $[0, x]$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e portanto existe $c \in]0, x[$ tal que

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 0 + x \operatorname{sh} 0 + \frac{x^2}{2} \operatorname{ch} 0 + \frac{x^3}{3!} \operatorname{sh} 0 + \frac{x^4}{4!} \operatorname{ch}(c)$$

Mas $\operatorname{ch}(c) > 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$ e $\operatorname{sh} 0 = 0$ implicam que para $x \neq 0$,

$$\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$$

o que demonstra a igualdade pretendida.

15 Aproximações Linear e Quadrática de uma Função

Se f' é uma função regular num intervalo I e a, x são pontos interiores de I, então, pelo Teorema de Taylor, existe $c \in]a, x[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2}(x - a)^2$$

A Aproximação Linear de f em a é a função

$$g : x \longmapsto f(a) + f'(a)(x - a)$$

e o seu gráfico é uma Recta. Da definição apresentada imediatamente se conclui que

$$\forall x \in]a, b[\ |f(x) - g(x)| \leq \frac{(x - a)^2}{2} \left| f''(c) \right|$$

que representa o erro cometido ao aproximar a função f pela função g em $x \in D_f$. Notar que esse erro não é conhecido pelo facto de c não o ser. Assim só podemos obter estimativas desse erro.

A título de exemplo, consideremos a função

$$f : x \longmapsto x^3$$

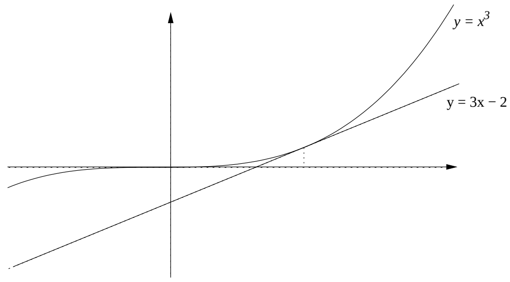
e seja $a = 1$. Então

$$\begin{cases} f(x) &= x^3 &\Longrightarrow & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= 3x^2 &\Longrightarrow & f'(1) &= 3 \\ f''(x) &= 6x &\Longrightarrow & f''(c) &= 6c \end{cases}$$

e portanto a Aproximação Linear de f em 1 é a função

$$g : x \longmapsto 1 + 3(x-1) = 3x - 2$$

e o seu gráfico é a recta de equação $y = 3x - 2$ (ver figura)



Notar que

$$|f(x) - g(x)| = \frac{6c}{2}(x-1)^2$$

com $c \in]1, x[$. Portanto a aproximação de f só é razoavelmente precisa quando x está próximo de 1.

Se f'' é regular num intervalo I e a, x são pontos interiores de I, então, pelo Teorema de Taylor, existe $c \in]a, x[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{(x-a)^3}{6} f'''(c)$$

A Aproximação Quadrática de f em a é a função

$$g : x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

e o seu gráfico é uma parábola, havendo dois casos possíveis representados na figura a seguir.

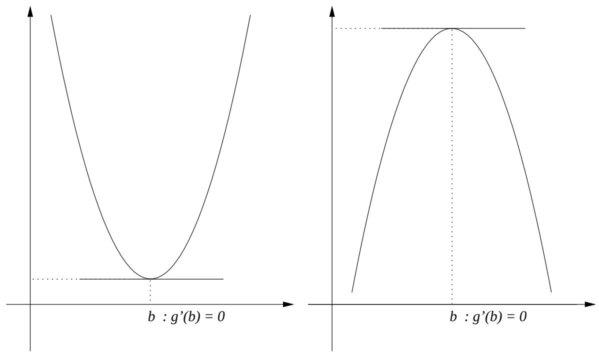
Então, tal como anteriormente, tem-se

$$\forall\ x \in]a, b]\ \ |g(x) - f(x)| = \frac{(x-a)^3}{6} f'''(c)$$

e esse erro será pequeno se x está próximo de a.

A título de exemplo, consideremos novamente a função

$$f : x \longmapsto x^3$$



(a) $f''(a) > 0$ (b) $f''(a) < 0$

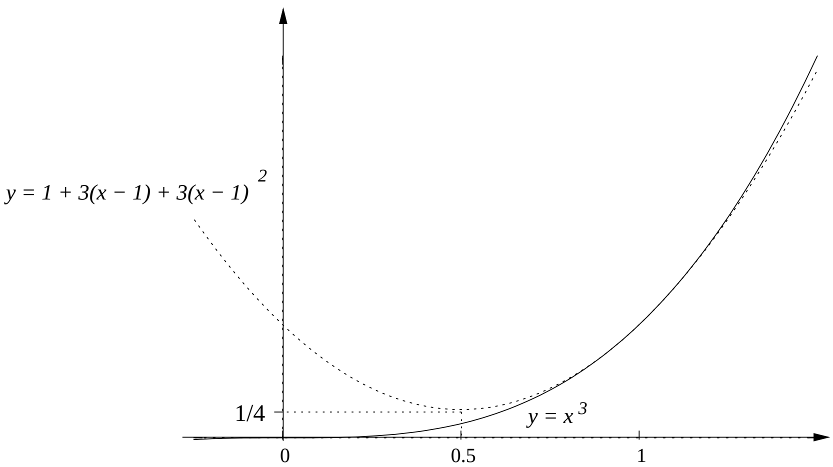
Então a aproximação quadrática de f em 1 é dada por

$$g(x) = 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2$$

Para calcular b tem-se

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3 + 6(x-1) = 0 \Longrightarrow b = \frac{1}{2} \text{ e } g(b) = \frac{1}{4}$$

O gráfico da função f e da sua aproximação quadrática são apresentados a seguir:



Notar que neste exemplo o erro não depende do ponto c, pois

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \; f'''(x) = 6$$

Donde

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \; |g(x) - f(x)| = (x-1)^3$$

16 Indeterminações

Indeterminação $\frac{0}{0}$

Iniciamos esta secção por enunciar e demonstrar o chamado Teorema de Cauchy.

Teorema de Cauchy *Se f e g são funções regulares em $[a,b]$ tais que $g(a) \neq g(b)$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a,b[$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstração: Consideremos a função

$$h: \ f(x) - \lambda g(x)$$

com λ o número real definido por

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Então h é uma função regular em $[a,b]$. Além disso da definição de λ vem

$$h(b) = f(b) - \lambda g(b) = f(a) - \lambda g(a) = h(a)$$

Portanto, pelo Teorema de Rolle, existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que

$$h'(c) = 0$$

Mas

$$h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0$$

e $g'(c) \neq 0$ implica que

$$\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Isso estabelece o teorema. □

Regra de L'Hopital *Se f e g são duas funções diferenciáveis em $I =]a-\delta, a+\delta[$, com $a \in \mathbb{R}$, tais que $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para $x \in I - \{a\}$ e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Demonstração: Como f e g são regulares no intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ então, pelo Teorema de Cauchy, para qualquer $x \in]a-\delta, a+\delta[$,

$$\exists_{c \in]a,x[} \ \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Mas f, g são contínuas em $]a-\delta, a+\delta[$ e por isso

$$\begin{cases} f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 \\ \\ g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases}$$

Donde

$$\forall_{x \in]a-\delta, a+\delta[} \ \exists_{c=c(x) \in]a,x[} \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e portanto a implicação é verdadeira. □

Notas:

(i) O teorema permanece verdadeiro se f e g são apenas diferenciáveis em $]a-\delta, a[\cup]a, a+\delta[$ ou se $a = \pm\infty$.

(ii) A Regra de L'Hopital permite calcular a derivada de uma função contínua em I e diferenciável pelo menos em $I - \{a\}$, com I um intervalo que contém a, quando $f'(a)$ não se pode calcular usando as Regras de Cálculo das Derivadas. Assim por exemplo, considere-se a função

$$f : x \longmapsto \arcsin x$$

Então $D_f = [-1, 1]$ e

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in]-1, 1[$. Contudo a fórmula não se pode usar para $x = 1$ ou $x = -1$. Mas f é contínua em 1 e portanto

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

Usando a Regra de L'Hopital tem-se

$$f'_e(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Do mesmo modo,

$$f'_d(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Indeterminação $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Teorema 9 *Se f e g são diferenciáveis em $]a-\delta, a+\delta[-\{a\} = I$ tais que $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para $x \in I$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Demonstração: Consideremos apenas o caso de $a \in \mathbb{R}$. Seja $x \in]a-\delta, a+\delta[$, $x \neq a$ e x_0 um ponto compreendido entre a e x. Então pelo Teorema de Cauchy, para cada x existe x_1 compreendido entre x_0 e x tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

Portanto

$$\frac{f(x)}{g(x)} \left[\frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} \right] = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

Mas

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x_0)}{f(x)} = 0, \ \lim_{x\to a} \frac{g(x_0)}{g(x)} = 0$$

pois $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Donde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lambda \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda\end{aligned}$$

$\square$

Cálculo de Alguns Limites Notáveis

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Trata-se de uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1$$

então o resultado é obtido pela Regra de L'Hopital.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

então o resultado é obtido como no caso anterior.

$$\boxed{\forall_{k\neq 0} \;\; \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k}$$

Tem-se

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+kx)}{x}}$$

Para calcular o limite do expoente, utiliza-se a Regra de L'Hopital e vem

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+kx))'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{k}{1+kx}}{1} = k$$

Portanto pela regra do limite da composição, tem-se

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$$

$$\boxed{\forall_{k\neq 0} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k, \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k}$$

Com efeito

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+k\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}\\ &= \lim_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{1}{y}} = e^k\end{aligned}$$

e o mesmo acontece com o outro limite.

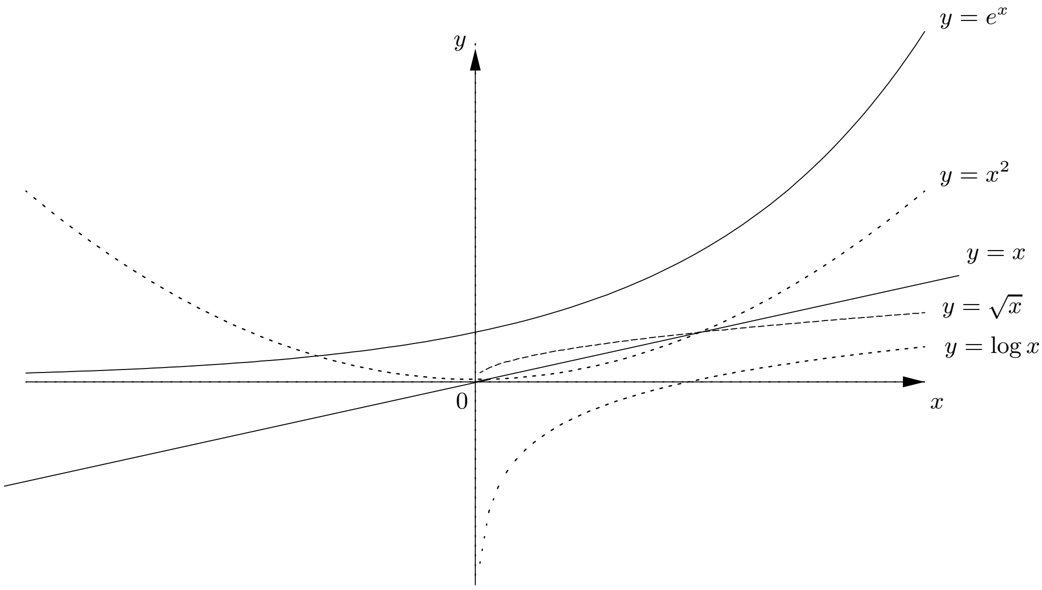
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt[k]{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[k]{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} = 0}$$

com k, p inteiros e $k > 1$.

Provemos apenas o último resultado, pois as demonstrações das outras igualdades são semelhantes. Usando o teorema 8, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^p)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{px^{p-1}}{e^x}$$

Se $p = 1$, então o valor desse limite é nulo e o resultado está provado. Se $p > 1$, a aplicação do mesmo raciocínio p vezes conduz ao resultado pretendido.



17 Funções Convexas e Côncavas

Apresentamos a seguir duas propriedades das funções convexas e côncavas continuamente diferenciáveis.

Propriedade 16 *Se f é uma função continuamente diferenciável num intervalo I, então*

(i) f é convexa em $I \Longleftrightarrow \forall_{\overline{x} \in I}\ \forall_{x \in I - \{\overline{x}\}}\ f(x) > f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$

(ii) f é côncava em $I \Longleftrightarrow \forall_{\overline{x} \in I}\ \forall_{x \in I - \{\overline{x}\}}\ f(x) < f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$

Demonstração: Iremos apenas provar (i), pois a outra demonstração é semelhante. Para provar a implicação $\Longrightarrow$, sejam $x \neq \overline{x}$ e

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)\overline{x}$$

com $\lambda \in]0, 1[$. Como f é convexa em I, então tem-se

$$f(y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \lambda \left[f(x) - f(\overline{x}) \right] \tag{5}$$

Além disso f é regular em I e, pelo teorema de Lagrange, existe c pertencente ao interior do intervalo de extremos y e $\overline{x}$ tal que

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\overline{x}) + f'(c)(y - \overline{x}) \\ &= f(\overline{x}) + \lambda f'(c)(x - \overline{x}) \end{aligned}$$

De (5), vem

$$f(x) - f(\overline{x}) > \frac{1}{\lambda} \left[f(y) - f(\overline{x}) \right] = f'(c)(x - \overline{x})$$

Fazendo tender y para $\overline{x}$, também c tende para $\overline{x}$ e como f é continuamente diferenciável em I, $f'(c)$ tende para $f'(\overline{x})$. Donde

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \tag{6}$$

Para provar que a desigualdade é estrita, suponhamos que existe $\tilde{x} \in I - \{\overline{x}\}$ tal que

$$f(\tilde{x}) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(\tilde{x} - \overline{x}) \tag{7}$$

Como f é convexa em I, então para qualquer $\lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) < \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda)f(\tilde{x}) \tag{8}$$

Mas de (7) vem

$$\begin{aligned} \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda)f(\tilde{x}) &= \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda)\left[f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(\tilde{x} - \overline{x})\right] \\ &= f(\overline{x}) + (1-\lambda)f'(\overline{x})(\tilde{x} - \overline{x}) \end{aligned}$$

Se $x = \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\tilde{x}$, então

$$x - \overline{x} = (1-\lambda)(\tilde{x} - \overline{x})$$

Da igualdade anterior e de (8), vem

$$f(x) < f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$$

o que contraria (6) e assim demonstra a implicação $\Longrightarrow$.

Para provar a implicação $\Longleftarrow$, suponhamos que para quaisquer x e $\overline{x}$ pertencentes a I e distintos se verifica

$$f(x) > f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$$

Para provar que f é convexa em I, sejam $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 \neq x_2$ e mostremos que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Se $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, então por hipótese

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(y) &> f'(y)(x_1 - y) \\ f(x_2) - f(y) &> f'(y)(x_2 - y) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(y) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - [\lambda + (1-\lambda)]\, f(y) \\ &= \lambda\, [f(x_1) - f(y)] + (1-\lambda)\, [f(x_2) - f(y)] \\ &> \lambda f'(y)(x_1 - y) + (1-\lambda)f'(y)(x_2 - y) \\ &= f'(y)\, [\lambda(x_1 - y) + (1-\lambda)(x_2 - y)] \\ &= f'(y)\, [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - y] = 0 \end{aligned}$$

Donde f é convexa em I. $\square$

Propriedade 17 *Se f é uma função continuamente diferenciável num intervalo I, então*

(i) f é convexa em $I \Longleftrightarrow f'$ é crescente em I.

(ii) f é côncava em $I \Longleftrightarrow f'$ é decrescente em I.

Demonstração: Provemos apenas (i), pois a demonstração da outra equivalência é semelhante. Para estabelecer a implicação $\Longrightarrow$, sejam $x_1 < x_2$ dois números reais de I quaisquer e provemos que $f'(x_1) < f'(x_2)$. Da propriedade anterior, vem

$$\begin{aligned} f(x_2) &> f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \\ f(x_1) &> f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Então

$$f'(x_2)(x_2 - x_1) > f(x_2) - f(x_1) > f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Donde

$$\left[f'(x_2) - f'(x_1)\right](x_2 - x_1) > 0$$

e $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Para provar a implicação $\Longleftarrow$, sejam x e $\overline{x}$ dois números de I quaisquer tais que $\overline{x} < x$. Pelo teorema de Lagrange existe $c \in]\overline{x}, x[$ tal que

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(c)(x - \overline{x})$$

Como f' é crescente em I, então $f'(c) > f'(\overline{x})$ e

$$f(x) > f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$$

Então f é convexa pela propriedade anterior. $\square$

Por este teorema a convexidade e a concavidade de uma função f com função derivada f' regular num intervalo I pode ser estudada a partir do sinal de $f''(x)$ para $x \in \mathrm{Int}(I)$.

Exemplos:

(i) Consideremos a função

$$f : x \longrightarrow x^3$$

Então $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$. Portanto f' é regular em $\mathbb{R}$. Donde

		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

Então f é côncava em $]-\infty, 0]$, convexa em $[0, +\infty[$ e tem um ponto de inflexão em $x = 0$ de valor $f(0) = 0$.

(ii) Consideremos a função quadrática

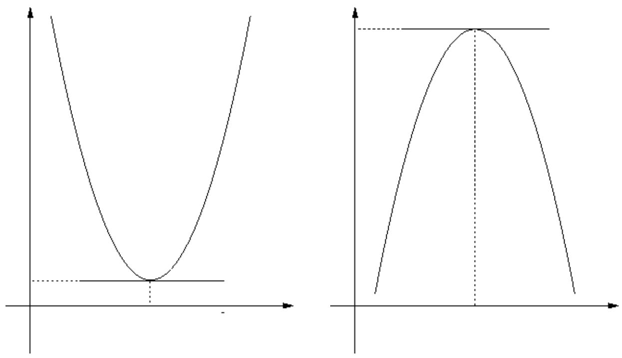
$$f : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$$

onde $a \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \\ f''(x) &= 2a \end{aligned}$$

e portanto f' é regular em $\mathbb{R}$. Então

$$\begin{cases} a > 0 \implies f \text{ é convexa em } \mathbb{R} \\ a < 0 \implies f \text{ é côncava em } \mathbb{R} \end{cases}$$



$a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$

18 Gráfico de uma Função Real de Uma Variável Real

A matéria ensinada neste semestre é uma ajuda preciosa para a construção do gráfico de uma função f. Com efeito, os seguintes temas são muito importantes para esse efeito:

(i) Domínio e Continuidade.

(ii) Limites nos extremos dos intervalos do domínio.

(iii) Monotonia.

(iv) Convexidade e concavidade.

(v) Intersecção com o eixo $X'X$ (raízes da equação $f(x) = 0$).

Em particular é possível construir todos os gráficos das funções elementares. A título de exemplo, consideremos a função exponencial

$$f : x \longrightarrow e^x$$

Então

(i) $D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

(iii) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ f'(x) = e^x > 0 \Longrightarrow f$ é crescente em $\mathbb{R}$.

(iv) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ f''(x) = e^x > 0 \Longrightarrow f$ é convexa em $\mathbb{R}$.

(v) $e^x = 0$ é impossível, pelo que o gráfico de f não intersecta o eixo $X'X$.

É agora fácil de construir o gráfico de f baseado nesta informação. Esse gráfico aparece na tabela 1 ($a > 1$).

19 Máximos e Mínimos Locais

Teorema 10 *Se f é uma função n vezes continuamente diferenciável num intervalo I e x_0 é um ponto interior de I satisfazendo*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \; f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

com n par, então

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & \Longrightarrow \; f \text{ tem um máximo local em } x_0 \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \Longrightarrow \; f \text{ tem um mínimo local em } x_0 \end{cases}$$

Demonstração: Se f é uma função n vezes continuamente diferenciável em I e $x_0 \in I$, então, pela Fórmula de Taylor, para qualquer $x \in I$, existe um c pertencente ao interior do intervalo de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Como $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, vem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Mas $f^{(n)}$ é uma função contínua e portanto se $f^{(n)}(x_0) < 0$, existe um intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tal que $f^{(n)}(x) < 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Como n é par, então para qualquer x pertencente a esse intervalo

$$\frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c) \leq 0$$

Donde $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x nesse intervalo e f tem um máximo local. A demonstração da outra implicação é semelhante. $\square$

A determinação de máximos e mínimos de uma função é feita do seguinte modo:

(1) Calcular o domínio da função e a derivada de f no interior do domínio.

(2) Determinar os candidatos a mínimos e máximos, que podem ser um dos seguintes pontos:

- (i) interiores onde f é derivável e $f'(x_0) = 0$.
- (ii) interiores onde f não é derivável.
- (iii) fronteiros.

(3) Verificação se os candidatos são mínimos ou máximos, para que o se utiliza o teorema 9 no caso (i) e o sinal da derivada antes e depois do ponto candidato (antes ou depois no caso de um ponto fronteiro) quando ocorrem os casos (ii) e (iii) ou o teorema 9 não pode ser aplicado no caso (i).

Exemplos

(1) Considere-se a função

$$f : x \longrightarrow x^2$$

Então $D_f = \mathbb{R}$ e $f'(x) = 2x$. Portanto f é derivável em $\mathbb{R}$ e os únicos candidatos satisfazem

$$f'(x) = 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Para verificar se 0 é mínimo ou máximo, calcula-se a segunda derivada de f e tem-se

$$f''(x) = 2$$

Então $f''(0) > 0$ e f tem um mínimo em 0.

(2) Considere-se a função

$$f : x \longrightarrow |x|$$

Então $D_f = \mathbb{R}$ e a derivada é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Portanto não há candidatos em pontos onde f é derivável (a derivada é sempre não nula). Por outro lado para $x = 0$ tem-se

		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

e f tem um mínimo em $x = 0$.

(3) Considere-se finalmente a função

$$f : x \longrightarrow \operatorname{argch} x$$

Então $D_f = [1, +\infty[$. A derivada para $x \in [1, +\infty[$ é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Então $f'(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e f não tem mínimos em $]1, +\infty[$. O ponto $x = 1$ é fronteiro e tem-se

	1	
$f'(x)$		$+$
f		$\nearrow$

Donde f tem um mínimo em $x = 1$.

Nota: O teorema 9 não é verdadeiro para n ímpar. Com efeito considere-se a função $f : x \longrightarrow x^3$. Então $D_f = \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Além disso $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 3 > 0$. Contudo a função f não tem mínimo em 0, pois é crescente em $\mathbb{R}$.

20 Integral de uma Função Contínua num Intervalo Fechado

Definição 3 *Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

com F uma primitiva de f em $[a,b]$.

Notas

(i) Integral de uma função contínua num intervalo fechado existe sempre e é um número real.

(ii) O integral não depende da primitiva. Com efeito se G é outra primitiva de f em $[a,b]$, então

$$G(x) = F(x) + C$$

com C uma constante. Portanto

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

(iii) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Propriedade 18 *Se f é contínua em $[a,b]$ e em $[b,c]$, então*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a,c]$, então

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$$

com F uma primitiva de f em $[a,c]$. Então F é também primitiva de f em $[a,b]$ e em $[b,c]$ e

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= F(c) - F(b) + F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

□

Nota: O teorema é também válido se a, b e c não estiverem ordenados.

Propriedade 19 *Se f é contínua em $[a,b]$, φ é continuamente diferenciável e injectiva em $[c,d]$ e $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

Demonstração: Da propriedade 15, vem

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C$$

Então

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left[F\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right]_a^b = F\left(\varphi^{-1}(b)\right) - F\left(\varphi^{-1}(a)\right)\\ &= F(d) - F(c) = \int_c^d f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

□

Teorema da Média: *Se f é contínua em $[a,b]$, então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Demonstração: Como f é contínua em $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

com F uma primitiva de f em $[a,b]$. Mas $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ e portanto F é continuamente diferenciável (e regular) em $[a,b]$. Então pelo teorema de Lagrange, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$$

□

Propriedade 20

(i) Se f é contínua, não negativa e não identicamente nula em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

(ii) Se g e h são contínuas e distintas em $[a,b]$, então

$$\forall_{x\in[a,b]}\ g(x) \leq h(x) \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b h(x)\,dx$$

Demonstração:

(i) Por hipótese existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) > 0$. Como f é contínua em $[a,b]$, então há pelo menos um intervalo I de extremos c e d tal que

$$\forall_{x\in I}\ f(x) > 0$$

Consideremos sem perda de generalidade que $a < c < d < b$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Pelo teorema da Média, o primeiro e terceiro integrais do membro direito são não negativos e o segundo é positivo. Isso demonstra o resultado.

(ii) É consequência de (i) usando a função f definida por $f(x) = h(x) - g(x)$.

$\square$

21 Funções com Variáveis nos Extremos dos Integrais

Seja f uma função contínua num intervalo I. Se $a \in I$, então para qualquer $x \in I$,

$$\int_a^x f(t)dt \ \text{ e } \int_x^a f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt$$

são números reais. Portanto podemos considerar as funções

$$g : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

e

$$h : x \longmapsto \int_x^a f(t)dt$$

Então

$$\forall x \in I \qquad g(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

$$h(x) = \int_x^a f(t)dt = F(a) - F(x)$$

com F uma primitiva de f em I. Portanto verificam-se as seguintes propriedades:

(i) $\forall x \in I \ g'(x) = f(x), \ h'(x) = -f(x)$

(ii) $g(a) = h(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0$

e g é a primitiva de f em I que satisfaz $g(a) = 0$. É ainda fácil concluir que:

(iii) $\mathrm{D}_g = \mathrm{D}_h =$ maior intervalo que contém a e onde f é contínua.

(iv) f e g são continuamente diferenciáveis (e portanto diferenciáveis e regulares) nos seus domínios.

Exemplos de Funções com Variáveis nos Extremos dos Integrais

(i) Função Logaritmo

Seja

$$f : t \longmapsto \frac{1}{t}$$

e $a = 1$. Então podemos considerar a função com integral

$$g : x \longmapsto \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt$$

que tem domínio $]0, +\infty[$. Além disso nesse intervalo

$$\int \frac{1}{t} dt = \log t + C$$

e portanto

$$g(x) = \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt = \log x - \log 1 = \log x$$

Mostrámos assim que a função logaritmo se pode escrever na forma

$$g : x \longmapsto \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt$$

Como ilustração da utilidade desta definição, provemos de seguida que

$$\forall x, y > 0 : \ \log(xy) = \log x + \log y$$

usando a igualdade

$$\forall x > 0 : \ \log x = \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt$$

Como $x > 0$ e $y > 0$, então também $xy > 0$ e

$$\log(xy) = \int\limits_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int\limits_1^x \frac{1}{t} dt + \int\limits_x^{xy} \frac{1}{t} dt$$

Para estabelecer a propriedade basta provar que

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \log y$$

Fazendo a substituição:

$$t = ux \Longrightarrow \varphi'(u) = x$$

então

$$\begin{cases} t & = & x & \Longrightarrow & u & = & 1 \\ t & = & xy & \Longrightarrow & u & = & y \end{cases}$$

e

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^{y} \frac{1}{ux} x du = \int_1^{y} \frac{1}{u} du = \int_1^{y} \frac{1}{t} dt$$

Portanto

$$\log(xy) = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt + \int_1^{y} \frac{1}{t} dt = \log x + \log y$$

como desejávamos provar.

(ii) Função Arco–Tangente

Seja

$$f : t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$$

Então f é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto podemos considerar a função

$$g : x \longmapsto \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

que tem domínio $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t + C$$

e portanto

$$g(x) = \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x$$

Chegámos assim à conclusão que a função arco–tangente se pode escrever na forma

$$g : x \longmapsto \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Esta expressão da função arco–tangente permite-nos estabelecer a seguinte propriedade:

Propriedade 21 *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe pelo menos um c compreendido entre 0 e x tal que*

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{c^{2n+2}}{1+c^2}x$$

Demonstração: Para qualquer $y \neq 1$, tem-se

$$1 + y + y^2 + \ldots + y^n = \frac{1-y^{n+1}}{1-y}$$

Fazendo $y = -t^2$ nesta igualdade, vem

$$1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

e portanto

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Então

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x 1dt - \int_0^x t^2dt + \int_0^x t^4dt - \ldots + (-1)^n \int_0^x t^{2n}dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Calculando os n primeiros integrais a partir da definição, tem-se

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

Pelo Teorema da Média, existe c compreendido entre 0 e x tal que

$$\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt = \frac{c^{2n+2}}{1+c^2}(x-0)$$

e isso estabelece o resultado pretendido. $\square$

Cálculo de π

O teorema anterior permite calcular um valor aproximado para o número π. Assim, fazendo $x = 1$, vem

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{c^{2n+2}}{1+c^2}$$

com $0 < c < 1$. Para n elevado,

$$\frac{c^{2n+2}}{1+c^2}$$

é pequeno. Por outro lado $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ e portanto obtemos

$$\frac{\pi}{4} \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{4}$$

Notar que como $0 < c < 1$, então

$$\lim_n \frac{c^{2n+2}}{1+c^2} = 0$$

e portanto

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

que é conhecida como Fórmula de Leibniz e que define π como a soma de uma série numérica alternada convergente (as séries numéricas serão estudadas na disciplina de Análise Matemática II do 2º Semestre).

É fácil de concluir que a determinação do valor de π a partir da Fórmula (4) necessita de muitas parcelas para se obter uma boa aproximação. Na prática é usada a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

Então, tem-se

$$\frac{\pi}{4} \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left[4 \left(\frac{1}{5} \right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{239} \right)^{2k+1} \right]$$

e portanto são necessárias muito menos parcelas para obter um bom valor aproximado de π. Sugerimos como exercício a determinação de π com $n = 10$ (ou seja, usando 11 parcelas) e a comparação do valor obtido com o dado por uma máquina de calcular.

(iii) Extensão: Função Composição

Seja h uma função real de uma variável real e consideremos a sua composição com a função com variável no extremo do integral

$$g : y \longrightarrow \int_a^y f(t)dt$$

isto é, a função

$$p = g \circ h : x \longrightarrow \int_a^{h(x)} f(t)dt$$

Da definição de composição de funções tem-se

$$D_p = \{x \in D_h : \; h(x) \in D_g\}$$

onde D_g é o maior intervalo que contém a e onde f é contínua. Assim, por exemplo, se

$$p : x \longrightarrow \int_0^{\log x} \operatorname{argth} t \, dt$$

então

$$D_p = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0 \wedge \log x \in]-1, 1[\}$$

Mas

$$\begin{aligned}\log x \in]-1,1[\quad &\Longleftrightarrow \quad \log x > -1 \wedge \log x < 1\\ &\Longleftrightarrow \quad x > -\frac{1}{e} \wedge x < e \Longleftrightarrow x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[\end{aligned}$$

Donde

$$D_p = \left]\frac{1}{e}, e\right[$$

Em relação à continuidade e diferenciabilidade da função p, verifica-se o seguinte resultado

Propriedade 22

(i) Se h é contínua em D_p, então p é contínua no seu domínio.

(ii) Se h é continuamente diferenciável em D_p, então p é continuamente diferenciável em D_p e

$$\forall_{x \in D_p}\ p'(x) = f(h(x))h'(x)$$

Demonstração:

(i) É consequência do facto da composição de funções contínuas ser contínua no seu domínio.

(ii) Se h é continuamente diferenciável em D_p, então para qualquer $x \in D_p$ tem-se

$$p'(x) = g'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

Como f é contínua em D_p e p' é o resultado da composição e multiplicação de funções contínuas, então p' é uma função contínua em D_p e p é continuamente diferenciável em D_p.

□

Exemplo: Consideremos o problema da determinação dos mínimos e máximos locais da função

$$p : x \longrightarrow \int_0^{\log x} \operatorname{argth} t\, dt$$

Como vimos anteriormente,

$$D_p = \left]\frac{1}{e}, e\right[$$

e pela propriedade anterior, p é contínua em D_p. Para calcular a derivada da função p, tem-se

$$p'(x) = \operatorname{argth}(\log x)\,(\log x)' = \frac{\operatorname{argth}(\log x)}{x}$$

Então p é continuamente diferenciável (e portanto regular) em D_p. Como D_p é um intervalo aberto, então os únicos candidatos a mínimos e máximos são os pontos que satisfazem $p'(x) = 0$. Mas

$$p'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\operatorname{argth}(\log x)}{x} = 0 \Longleftrightarrow \log x = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Donde $x = 1$ é o único candidato. Para verificar se é mínimo ou máximo calcula-se a segunda derivada de p em 1

$$\begin{aligned} p''(1) &= \left((\operatorname{argth}(\log x))' \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)' \operatorname{argth}(\log x)) \right)_{x=1} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \right)_{x=1} = \left(\frac{1}{1-\log^2 x} \right)_{x=1} = 1 > 0 \end{aligned}$$

Então p tem um mínimo local (e global) em $x = 1$ de valor

$$p(1) = \int_0^{\log 1} \operatorname{argth} t \, dt = \int_0^0 \operatorname{argth} t \, dt = 0$$

22 Integrais Impróprios

Propriedade 23 *Se $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e os integrais $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ são convergentes, então*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx$$

é convergente e

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Demonstração:

(i) Consideremos primeiramente o caso em que f é contínua em $[a, b[$ com $b \in \mathbb{R}$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

e

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\,dt$$

são números reais. Das regras dos limites e dos integrais definidos, vem

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx &= \lim_{x\to b^-}\int_a^x (f(t)+g(t))\ dt \\
&= \lim_{x\to b^-}\left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x\to b^-}\int_a^x g(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

As demonstrações dos casos em que $b=+\infty$ e do intervalo $]a,b]$ são semelhantes.

(ii) Se f é contínua em $]a,b[$, então para $c\in]a,b[$ tem-se

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^c (f(x)+g(x))\ dx + \int_c^b (f(x)+g(x))\ dx$$

Mas por (i), vem

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx &= \left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx\right) + \left(\int_c^b f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx\right) \\
&= \left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\right) + \left(\int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx\right) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

(iii) Se o integral é de 2ª espécie, então é soma de $n\geq 2$ integrais impróprios de 1ª espécie

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x)+g(x))\ dx$$

com $k = 1, \ldots, n$, $a_1 = a$ e $a_{n+1} = b$ e tem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) + g(x))\; dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx + \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\,dx \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

□

Propriedade 24 *Se f é positiva e tem um número finito de pontos de descontinuidade no intervalo de extremos a e b ($a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), então*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \;\; \textit{ou} \;\; \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$$

Demonstração:

(i) Consideremos primeiramente o caso em que f é contínua em $[a, b[$. Iremos apenas assumir que $b \in \mathbb{R}$, pois a demonstração para $b = +\infty$ é semelhante. Então a função

$$\begin{aligned}
g : [a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt
\end{aligned}$$

é crescente em $[a, b[$, pois

$$\forall_{x \in]a,b[}\; g'(x) = f(x) > 0$$

Portanto pela propriedade do limite das funções monótonas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

existe e é igual a $\sup\limits_{x \in [a,b[} g(x) > 0$ ou diverge para $+\infty$.

A demonstração para o caso de $]a, b]$ é semelhante à anterior usando a função

$$\begin{aligned}
h :]a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \int_x^b f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(ii) Se f é contínua e positiva em $]a,b[$, então para $c \in]a,b[$ tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

e o resultado é consequência da regra da soma dos limites de funções.

(iii) Se o integral é de 2ª espécie, então podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

com $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$ e o resultado é também consequência da regra da soma dos limites de funções.

□

Nota: A propriedade também é válida se f é não negativa e não nula no intervalo de extremos a e b.

23 Critérios de Convergência dos Integrais Impróprios

1º Critério de Comparação: *Se f e g são duas funções com um número finito de pontos de descontinuidade num intervalo de extremos a e b, satisfazendo*

$$\exists_{M>0}\ \forall_{x\in[a,b]}\ 0 \leq f(x) \leq M\,g(x)$$

então

(i) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *é convergente* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente e*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Demonstração:

(i) Consideremos primeiramente o caso do intervalo $[a,b[$ com $b \in \mathbb{R}$. Como

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

é convergente, então

$$\int_a^b g(x)\,dx = S = \sup_{x\in[a,b[} \int_a^x g(t)\,dt$$

Mas por hipótese

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq MS$$

para qualquer $x \in [a,b[$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt \leq MS = M\int_a^b g(x)\,dx$$

As demonstrações dos casos de $b = +\infty$ e do intervalo $]a,b]$ são semelhantes. Se f é contínua em $]a,b[$, então para $c \in]a,b[$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\
&\leq M\int_a^c g(x)\,dx + M\int_c^b g(x)\,dx \\
&= M\int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

Finalmente consideremos o caso de um integral de 2ª espécie. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

com $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$. Como a propriedade é válida para integrais de 1ª espécie, então

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx \leq M\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\,dx$$

e

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx$$

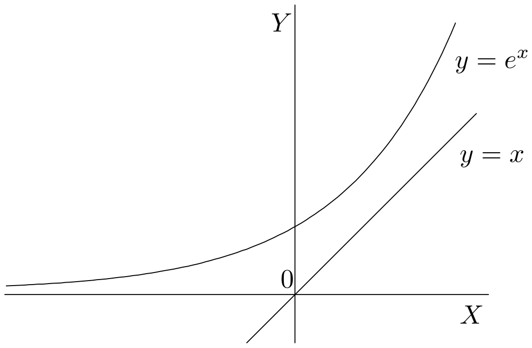
$\square$

Exemplo: Consideremos o integral de 1ª espécie

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Como não se consegue calcular uma primitiva da sua função integranda, iremos primeiramente estabelecer a sua convergência para depois podermos calcular um seu valor aproximado por um método numérico. Como $e^x > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver figura), então

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ e^{x^2} > x^2$$



Donde

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$$

Mas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + 1 = 1 \in \mathbb{R}$$

e portanto é convergente. Então o integral dado é convergente e o seu valor é menor que um.

2º Critério de Comparação: *Sejam $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $d = b^-$ ou $+\infty$, f e g duas funções contínuas, não negativas e não identicamente nulas em $[a, b[$.*

(i) Se

$$\lim_{x\to d}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$$

então os integrais $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ são da mesma natureza (isto é, ambos convergentes ou divergentes para $+\infty$).

(ii) Se

$$\lim_{x\to d}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

então

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ convergente} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ convergente}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$$

Demonstração: Provemos apenas (i), com $b \in \mathbb{R}$, pois as demonstrações dos outros casos são semelhantes. Da definição de limite de uma função tem-se

$$\forall_{\theta>0}\ \exists_{\delta>0}\ \left[b-\delta<x<b \Rightarrow \lambda-\theta<\frac{f(x)}{g(x)}<\lambda+\theta\right]$$

Se escolhermos $\theta>0$ tal que $\lambda-\theta>0$, então existe um $\delta>0$ tal que

$$\forall_{x\in]b-\delta,b[}\ f(x)<(\lambda+\theta)g(x) \wedge g(x)<\frac{1}{\lambda-\theta}f(x)$$

O resultado é agora consequência do 1º Critério de Comparação. $\square$

Nota:

(i) Se

$$\lim_{x\to d}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

então

$$\lim_{x\to d}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

e a propriedade (ii) é válida substituindo $f(x)$ por $g(x)$.

(ii) A propriedade é também válida para funções contínuas em $]a,b]$, com $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ e usando o limite

$$\lim_{x\to d}\frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $d=a^+$ ou $-\infty$.

Exemplo: Consideremos o integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

Como f é contínua e não negativa em $]0,\pi]$, então podemos usar o 2º Critério de Comparação. Como

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1>0$$

então o integral dado é da mesma natureza do integral

$$\int_0^\pi \frac{1}{x}\,dx=[\log x]_0^\pi=\log\pi-\lim_{x\to0^+}\log x=+\infty$$

Então o integral dado é divergente para $+\infty$.

Índice